Министерство образования и науки Российской Федерации

Сибирский федеральный университет

Г.Б. Масальский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ

Учебное пособие

*Рекомендовано Сибирским региональным отделение учебно-методического объединения высших учебных заведений РФ по образованиюв области автоматизации и управления для студентов, обучающихся по направлению подготовки 220000 «Автоматика и управление», специальности 220402.65 «Роботы и робототехнические системы» и бакалавров по направлению 221000.62 «Мехатроника и робототехника».*

Красноярск

СФУ

2011

УДК 519.7(07)

ББК 22.18я73

М 31

Рецензенты: Е.Б. Цой, д.т.н., профессор кафедры «Прикладная математика», проректор по международным связям НГТУ

А.М. Малышенко, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой интегрированных компьютерных систем управления НИ ТПУ

Масальский, Г.Б.

М 31 Математические основы кибернетики: учебное пособие / Г.Б. Масальский. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – 176 с.

ISBN 978-5-7638-2358-5

Излагаются наиболее часто используемые на практике методы и алгоритмы анализа случайных величин и процессов, проверки статистических гипотез, обработки результатов, эксперимента, формализации объектов управления, идентификации параметров статических и динамических моделей, временных рядов, планирования активного эксперимента для статических моделей первого и второго порядка. Материал сопровождается примерами моделирования в системе Mathcad.

Предназначено студентам направления подготовки 220000 «Автоматика и управление», специальности 220402.65 «Роботы и робототехнические системы», а также для направления подготовки бакалавров 221000.62 «Мехатроника и робототехника». Может служить пособием студентам, аспирантам и сотрудникам при формализации стохастических объектов управления.

УДК 519.7(07)

ББК 22.18я73

© Сибирский федеральный

университет, 2011

ISBN 978-5-7638-2358-5

**ВВЕДЕНИЕ**

Робототехнические системы, технологические процессы, гибкие автоматизированные производства, интегрированные производственные системы относятся к классу сложных систем.

Эти системы можно рассматривать как технические системы, человеко-машинные системы, экономические системы. Теория и практика управления подобными системами развита в ***кибернетике*** – *науке об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных управляющих системах.*

У древних греков термин кибернетика соответствовал понятию «искусство управлять». У французского ученого А.-М. Ампера (1775-1836 г.) этот термин соответствовал несуществующей науке об управлении человеческим обществом.

Опубликование американским ученым Норбертом Винером (1894-1964 г.) в 1948 г. и в 1954 г. книг о кибернетике является началом отсчета формирования научного направления.

Систематизация в 1956 г. основных понятий кибернетики английским ученым У.-Р. Эшби и развитие электронных вычислительных машин расширили границы применения кибернетики. Выделились в самостоятельные направления техническая кибернетика, экономическая кибернетика, биологическая кибернетика, медицинская, физиологическая, психологическая и военная кибернетика.

Созданием научного аппарата и методов исследования для изучения широкого класса систем управления, независимо от их конкретной природы занимается ***теоретическая кибернетика.*** Теоретическая кибернетика включила в себя ряд научных направлений математики, такие как математическая логика, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, теория оптимизации, теория информации, теория алгоритмов, теория случайных процессов, теория игр, ряд направлений современной теории управления, теории идентификации и других научных направлений.

Кибернетика позволяет изучать на основе единых подходов и методов технические системы и представляет собой этап развития теории и практики управления сложными системами.

Проектирование и исследование робототехнических систем (РТС), автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП), автоматизированных систем управления предприятием (АСУП), гибких автоматизированных производств (ГАП) тесно связано с такими понятиями, как идентификация, оптимизация, объект управления или проектирования, модель, моделирование. Поэтому в учебный план направления подготовки бакалавра 22100.62 - Мехатроника и робототехника введена дисциплина «Математические основы кибернетики». В учебном пособии представлены материалы курса лекций, читаемого автором с 1992 г. для студентов специальности 210300 Роботы и робототехнические системы.

Предпочтения в выборе методов, задач и объектов идентификации обусловлены знаниями, полученными во время учебы в аспирантуре на кафедре «Автоматика» Московского энергетического института (технического университета), опытом работы на ряде предприятий при выполнении прикладных и научных исследований.

В первой главе приведены основные понятия и определения теории вероятностей, представлены функции распределения вероятностей случайной величины и вектора случайных величин, их числовые характеристики, примеры моделирования их в системе Mathcad.

Большое внимание уделено случайным процессам и их основным статистическим характеристикам, анализируется прохождение случайного процесса через линейное динамическое звено.

Во второй главе изложены общие понятия и определения математической статистики, представлены расчеты оценок случайной выборки. Приведенные примеры проверки статистических гипотез в дальнейшем используются в методах идентификации и планирования эксперимента.

Приводимая процедура последовательного анализа для задач статистического контроля качества продукции не столь широко представлена в литературе, но весьма привлекательна для процессов контроля, реализуемых в автоматизированных системах реального времени. Представленные процедуры обработки результатов измерения случайного процесса ориентированы для реализации на цифровой технике (компьютеры, промышленные контроллеры, микросистемы) и сопровождены примерами моделирования и расчета в системе Mathcad.

Третья глава посвящена общим вопросам описания объектов управления, характеристике статических и динамических моделей объектов управления. Приведенный пример описания процесса электролиза алюминия отражает основные этапы описания технологического процесса как объекта управления.

В четвертой главе представлены часто применяемые процедуры идентификации статических и динамических объектов, временных рядов, ориентированные на компьютерную обработку данных эксперимента, с примерами расчета в системе Mathcad.

В пятой главе представлены основные методы планирования активного эксперимента в задачах идентификации линейных статических моделей первого и второго порядка.

Автор будет признателен за критические замечания, направленные на совершенствование представленных материалов. E-mail: gmasalsky@mail.ru

1. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

**И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

* 1. **Основные понятия и определения теории вероятностей**

Теория вероятностей изучает объективные закономерности массовых случайных явлений, проявляющиеся при многократном воспроизведении заданного основного комплекса условий. С каждым из случайных явлений связаны определенные *события*, которые могут осуществляться или не осуществляться в результате опыта. Например, если говорят, что процент стандартных деталей 92 % при данных условиях обработки (одна и та же деталь, станок, токарь.), то это означает, что из сотни деталей в *среднем* 92 стандартные детали. Конечно, не в каждой сотне будет 92 годные детали, иногда их будет 91, 94, 93 и т. д. Но в среднем при многократном изготовлении в одних и тех же условиях процент 92 будет оставаться неизменным.

Событие, которое при заданном основном комплексе условий:

- обязательно произойдет, называется *достоверным*;

- не может произойти, называется *невозможным*;

- может произойти, а может и не произойти, называется *случайным*.

Количественной мерой объективной возможности осуществления события при фиксированном основном комплексе условий является *вероятность* этого события. Так вероятность некоторого события  определяется как предел отношения

, (1.1)

где  – общее число опытов;  – число опытов, в которых произошло событие .

Практическая ценность понятия вероятности в том, что, хотя появление рассматриваемого события  (например, изготовление стандартных деталей) не может быть точно предугадано, однако есть все основания полагать, что в любой достаточно длинной серии испытаний относительная частота свершения события  будет мало отличаться от его вероятности.

Очевидно, что для достоверного события  имеем , для невозможного, для случайного 

Два события  и  называются *статистически независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или нет другое событие. В противном случае событие  и  *статистически зависимы*.

Вероятность события , найденная при условии, что осуществилось событие , называется *условной вероятностью* события  и обозначается  или иногда  и читается - вероятность события  при условии, что состоялось событие . Аналогично можно ввести условную вероятность события . Для статистически независимых событий

, .

Вероятность события , которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий , образующих полную группу событий, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события  (формула полной вероятности)

, (1.2)

где .

**Пример 1.1.** Два завода изготовляют лампочки и поставляют на рынок соответственно 70 % и 30 % всей потребляемой продукции. Из каждых 100 лампочек первого завода 83 стандартных и второго соответственно - 63. Тогда *безусловная вероятность* покупки стандартной лампочки потребителем на рынке

.

Но если мы знаем, что на рынке только продукция первого завода, то вероятность покупки стандартной лампочки изменится

.

Здесь через  обозначено событие выпуска продукции первым заводом, через  – событие покупки стандартной лампочки.

Во многих практических ситуациях описание случайных явлений в терминах событий, когда отмечается лишь факт их наличия или отсутствия, т.е. дается качественная характеристика случайного явления, оказывается недостаточным. По этой причине целесообразнее представлять результаты опытов количественно в виде некоторой случайной величины.

*Случайная величина* есть величина определенной физической размерности, принимающая в результате эксперимента то или иное числовое значение, которое в принципе нельзя предсказать, исходя из основного комплекса условий проведения эксперимента. Случайная величина представляет собой количественную характеристику случайных явлений, не изменяющуюся во времени. Чтобы охарактеризовать случайную величину, необходимо:

1) указать область ее возможных значений;

2) задать способ количественного определения вероятности попадания случайной величины в произвольную подобласть этой области.

В зависимости от того, как определена область возможных значений, случайные величины подразделяются на дискретные и непрерывные.

*Дискретной* называют случайную величину, возможные значения которой есть отдельные изолированные числа (т.е. между двумя соседними числами нет возможных значений). При этом число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Если случайная величина принимает любое значение в области возможных значений, при этом число возможных значений ее оказывается бесконечным и несчетным, то она называется *непрерывной случайной величиной.*

Способ количественного определения вероятностей попадания случайной величины в произвольные подобласти области ее возможных значений может быть задан с помощью *закона распределения* вероятностей случайной величины. Закон распределения вероятностей каждому возможному значению дискретной случайной величины или некоторому *интервалу* значений непрерывной случайной величины ставит в соответствие вероятность того, что случайная величина примет это возможное значение или попадет в данный интервал.

* 1. **Функции распределения вероятностей случайной величины**

Аналитическим выражением законов распределения служат *функции распределения вероятностей*. Кроме аналитического, законы распределения дискретных случайных величин могут быть заданы в виде *таблицы* или *графика*.

Остановимся на понятии функции распределения вероятностей.

*Интегральной функцией распределения вероятностей* случайной величины  называется функция

, (1.3)

определяющая для каждого значения  вероятность того, что случайная величина  примет значение, меньше чем .

Здесь  – случайная величина;  – конкретное значение случайной величины (теоретическое или наблюдаемое).

Основные свойства интегральной функции распределения или как часто ее называют просто функции распределения:

** (1.4)

На рис. 1.1 приведен возможный вид интегральной функции распределения непрерывной случайной величины.

Очевидно, вероятность того, что случайная величина  примет значение, заключенное в интервале , равна

 (1.5)

Аналогично

 (1.6)

так как можно раскрыть





Рис. 1.1. Возможный вид интегральной функции распределения

непрерывной случайной величины

**Следствие.** Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение , равна нулю , хотя это возможное событие, т.е.

** (1.7)

**Пример 1.2.** Интегральная функция непрерывной случайной величины  (время безотказной работы устройства) равна



Найти вероятность безотказной работы устройства за время .

**Решение**. 

.

**Пример 1.3.** Закон распределения дискретной случайной величины задан в виде следующей таблицы, первая строка которой содержит возможные значения , а вторая - вероятности .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 4 | 7 |  |
|  | 0.5 | 0.2 | 0.3 |

Необходимо найти интегральную функцию  и начертить ее график.

**Решение.** Если , то . Если , то , если , то . Если , то . Вероятности для последующих интервалов суммируются с предыдущими. Окончательно имеем (рис. 1.2).





Рис. 1.2. Пояснения к примеру 1.3

Если интегральные функции распределения непрерывных случайных величин дифференцируемы во всей области их возможных значений, то закон распределения вероятностей может быть описан в аналитической форме с помощью *дифференциальной функции распределения вероятностей*

. (1.8)

Если  – достаточно малая величина, то

,

т. е. функция  равна отношению вероятности попадания случайной величины  внутрь интервала , к величине этого интервала. Поэтому зачастую эту функцию называют *функцией плотности распределения вероятностей*.

Основные ее свойства:

**;  ; . (1.9)

Следствие

** (1.10)

Возможный вид дифференциальной функции распределения вероятностей приведен на рис. 1.3. Площадь заштрихованных зон соответствует вероятности попадания случайной величины в соответствующий интервал.



Рис. 1.3. Возможный вид функции плотности вероятности

непрерывной случайной величины

Примеры функций распределения случайных величин.

*Равномерное распределение* имеет следующую функцию плотности распределения вероятностей

 (1.11)

где .

###### Числовые характеристики равномерного распределения – математическое ожидание и дисперсия равны

. (1.12)

В системе Mathcad вычисление интегральной , дифференциальной  функции равномерного распределения с параметрами  на интервале (-1, 6) с шагом  и вычисление числа , удовлетворяющего условию , где  – заданная вероятность этого события, представлено на рис. 1.4.

*Нормальное распределение* (Гаусса) определено следующей функцией плотности распределения вероятностей

, (1.13)

где  – математическое ожидание и дисперсия случайной величины *.*

В системе Mathcad вычисление интегральной, дифференциальной функции нормального распределения с математическим ожиданием ** и средним квадратическим отклонением  в интервале с шагом  и вычисление числа , удовлетворяющего условию , где – заданная вероятность, представлено на рис.1.5.

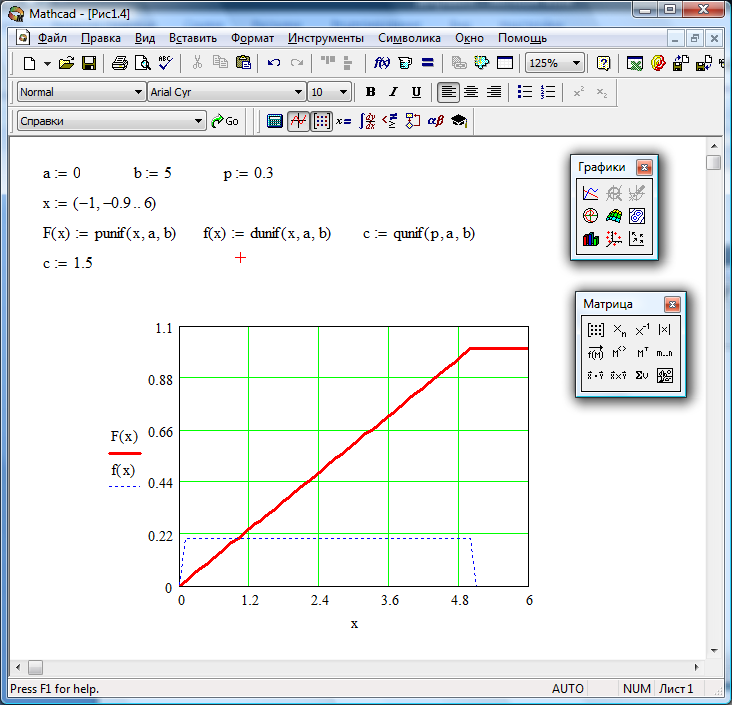


Рис. 1.4. Функции и графики равномерного распределения в системе Mathcad

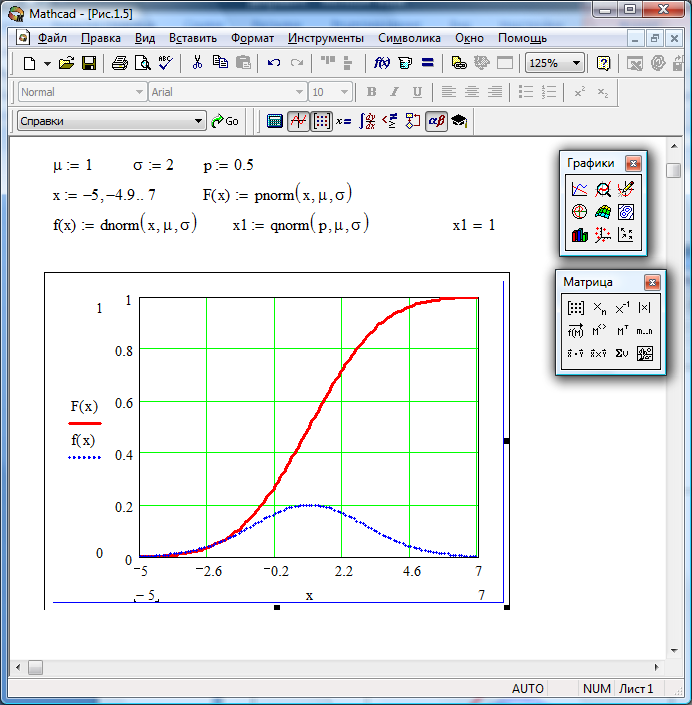


Рис. 1.5. Функции и графики нормального распределения в системе Mathcad

Это распределение полностью задается двумя параметрами: математическим ожиданием  и дисперсией . Поэтому во многих практических задачах, предполагая, что распределение случайной величины является нормальным, пытаются оценить  и . Нормальное распределение используется наиболее часто для описания свойств различных случайных величин.

Теоретическое обоснование существования нормального распределения дает *центральная предельная теорема*.

Суть ее такова. Когда есть основание рассматривать исследуемую случайную величину как сумму большого числа независимых случайных воздействий, влияние каждого из которых ничтожно мало, то даже если распределения составляющих воздействий неизвестны, то можно ожидать, что исследуемая случайная величина будет распределена по нормальному закону. Отсюда не следует, что любая случайная величина, если не доказано противное, имеет нормальное распределение. Нормальное распределение есть один из типов распределений, встречающихся в природе, хотя и имеющее наибольшее практическое приложение. Оно обладает удобными математическими свойствами, поэтому, в частности, большинство методов математической статистики построено в предположении, что исследуемая величина подчиняется нормальному распределению, хотя на практике всегда требуется проверка данного предположения.

Для нормального распределения вероятность того, что *Х* примет значение в интервале  равно

, (1.14)

где  – функция Лапласа, сведенная в таблицы, имеется во многих справочниках.

В частности, вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа ,

. (1.15)

**Пример 1.4.** Пусть  – нормально распределенная случайная величина с  и . Необходимо найти вероятность того, что в результате испытаний примет значение из интервала (12, 14).

**Решение.**

.

Из 2 [1] находим

**.

Следовательно,

**.

В системе Mathcad этот расчет выглядит следующим образом:

pnorm (14, 10, 2) – pnorm (12, 10, 2) = 0. 136.

* 1. **Числовые характеристики случайных величин**

Интегральная или дифференциальная функции распределения вероятностей являются исчерпывающими вероятностными характеристиками случайной величины. Однако часто достаточно знать лишь некоторые *числовые параметры*, характеризующие отдельные существенные черты распределения случайной величины. К ним относят.

*Математическое ожидание* непрерывной случайной величины , возможные значения которой принадлежат всей оси *ОХ,* определяется выражением

, (1.16)

соответственно для дискретной случайной величины

 (1.17)

В выражениях (1.16) и (1.17) предполагается, что интеграл и сумма сходятся абсолютно.

Если  – случайная величина, то произвольная функция , также является случайной величиной. Математическое ожидание этой функции

**, (– непрерывна); (1.18)

, (– дискретна). (1.19)

*Дисперсия* случайной величины равна

, (– непрерывна); (1.20)

, (– дискретна). (1.21)

Величину  – называют *средним квадратическим отклонением (стандартом) случайной величины* .

 – центр и степень рассеяния случайной величины.

Некоторые свойства

 (1.22)

здесь  – взаимно независимые случайные величины.

Для характеристики вариабельности случайной величины используют коэффициент вариации .

Значения  и  используются для центрирования случайной величины

 (1.23)

и нормирования (стандартизации) случайной величины

. (1.24)

Очевидно, что .

Кроме перечисленных, имеются и другие числовые характеристики: медиана, мода, размах, коэффициенты асимметрии, эксцесса и др.[1, 2].

**1.4. Многомерные распределения вероятностей**

Часто для описания практической ситуации необходимо использование нескольких случайных величин . Этот набор действительных случайных величин представляет значение -мерной случайной величины . В этом случае говорят о системе случайных величин или *n*-мерном случайном векторе. Каждое элементарное событие может рассматриваться как результат сложного испытания, состоящего в измерении всех величин , и интерпретироваться как точка -мерного пространства или вектор. Каждая из величин  является случайной величиной (одномерной). Например, если эксперимент повторяется  раз, то его результаты удобно рассматривать как  случайных величин.

Распределение системы двух случайных (координат) величин  и  или двумерного случайного вектора  задается интегральной функцией совместного распределения

**. (1.25)

Функция  имеет следующие основные свойства:

**

**

 *-* неубывающая функция.

Вероятность попадания в прямоугольную область равна (рис. 1.6).





Рис. 1.6. К определению вероятости попадания в прямоугольную область

Если функция  достаточно гладкая, то ее можно продифференцировать и получить двумерную плотность вероятностей

, (1.26)

обладающую следующими свойствами:

 (1.27)

Вероятность события, что случайные величины  и  попадут в некоторую область  равна

. (1.28)

Геометрически вероятность соответствует относительному объему тела, ограниченного снизу областью , сверху функцией .

Две случайные величины  и  называются *независимыми*, если их совместная функция распределения является произведением индивидуальных функций плотностей вероятности

, (1.29)

где .

Аналогично понятию условной вероятности может быть введено понятие условного распределения случайной величины  при условии, что величина  приняла некоторое конкретное значение 

**.(1.30)

Геометрически она представляет кривую от сечения поверхности  плоскостью параллельной оси , и проходящей через точку  и нормированную множителем , чтобы удовлетворить условию

**

Для независимых случайных величин  и 

** (1.31)

Среди числовых характеристик многомерных распределений выделим (на примере двумерного) следующие.

Математические ожидания самих случайных величин (центр рассеяния)

** (1.32)

Математическое ожидание некоторой функции **

|  |  |
| --- | --- |
|  | для непрерывных, |
| для дискретных. |

(1.33)

Центральные моменты второго порядка:

дисперсии случайных величин

** (1.34)

и ковариацию случайных величин  и , или корреляционный момент, или смешанный момент второго порядка

. (1.35)

Иначе



 (1.36)

Значениекорреляционного момента служит определенной мерой зависимости между  и . Для независимых случайных величин . Удобнее в качестве меры взаимозависимости случайных величин использовать коэффициент корреляции (безразмерный параметр)

**. (1.37)

По своему физическому смыслу коэффициент корреляции является простейшей характеристикой статистической связи, характеризующей лишь степень линейной зависимости  и *.*

Используя условные функции распределения, можно ввести *условное* математическое ожидание и *условную дисперсию*

**, (1.38)

**. (1.39)

Многие понятия, введенные для совокупности двух случайных величин, обобщаются на -мерный случай. Например, математическое ожидание функции -переменных

. (1.40)

Среди распределений выделим двумерное нормальное распределение, которое задается функцией плотности распределения вероятностей вида

, (1.41)

где

- вектор - столбец;

*-* корреляционная матрица;

 - определитель корреляционной матрицы.

Графики функций (1.41) и ее сечения, линии равной плотности распределения вероятностей, представлены на рис. 1.7 и рис. 1.8.

Для построения графиков необходимо предварительно рассчитать интервалы изменения переменных



Для выбранного числа точек  рассчитаем шаг изменения переменных



Чтобы сохранить пропорциональность при построении графика по обеим координатам необходимо, чтобы обе переменные изменялись с одинаковым интервалом. Для этого выберем среди них максимальный интервал .

Для симметричности графика по оси  рассчитаем



При вычерчивании графиков Mathcad по осям  и  использует значения индекса  и  соответственно, а по оси ординат – значение функции . Числовые значения линий равного уровня (см. рис. 1.7, *б* и рис. 1.8, *б*) соответствуют численным значениям функции, полученным при сечении функции  плоскостью параллельной оси .

Линии равного уровня плотности распределения  представляют собой эллипсы, оси которых для  совпадают с осями координат (см. рис. 1.7, *б*). Причем .

Для вычисления исходных значений переменных, соответствующих, например, значению , воспользуемся оператором программы (см. рис.1.7)

.

Степень рассеяния двух случайных величин  и  характеризуетсяплощадью эллипса, равного . Следовательно, чем больше , тем меньше площадь.







a) б)

Рис. 1.7. Двумерное нормальное распределение для :

а) функция плотности распределения вероятности;

б) ее линии равного уровня







а) б)

Рис. 1.8. Двумерное нормальное распределение для :

а) функция плотности распределения вероятности;

б) ее линии равного уровня

Каждая из двух случайных величин, распределенных в совокупности по двумерному нормальному закону, также распределена нормально безотносительно тому, являются ли эти случайные величины независимыми. Обратное утверждение неверно, совместное распределение двух случайных величин, каждая из которых распределена нормально, не обязательно будет нормальным (не путать с суммой двух случайных величин). Если , то для нормального распределения некоррелированность означает одновременно и их независимость

.

Условное распределение также нормально с параметрами:

** (1.42)

Нетрудно видеть, что при  параметры условного распределения совпадают с соответствующими параметрами каждой случайной величины  и .

В заключении отметим, что любая функция случайных величин  является случайной величиной. Поэтому зачастую появляется задача определения ее вероятных свойств. В общем случае задача чрезвычайно трудная и решается для линейных преобразований. Так, линейная комбинация нормально распределенных случайных величин также распределена нормально. В случае нелинейных преобразований случайных величин получены функции распределения относительно простых преобразований (умножение, деление) [2, 3].

**1.5. Случайные процессы и их основные статистические характеристики**

Функцию, значение которой при каждом значении независимой переменной является случайной величиной, называют *случайной функцией.* Случайные функции, для которых независимой переменной является время , называют *случайными процессами* или *стохастическими процессами.*

Случайный процесс  не есть определенная кривая, он является множеством определенных кривых , где , получаемых в результате отдельных опытов (рис. 1.9) [3, 4]. Каждую кривую этого множества называют *реализацией случайного процесса.* Сказать заранее, по какой из реализации пойдет процесс, невозможно.

Рассмотрим, например, случайный дрейф на выходе усилителя постоянного тока при входном напряжении, равном нулю. Чтобы изучить характеристики дрейфа, можно взять, например,  одинаковых усилителей, поместить их в одинаковые условия работы, одновременно включить и получить  осциллограмм дрейфа на выходах усилителей. Совокупность всех осциллограмм образует случайный процесс , a каждая из осциллограмм является конкретной реализацией  случайного процесса.

Для любого фиксированного момента времени, например , реализация случайного процесса  представляет собой конкретную величину, значение же случайной функции  является случайной величиной, называемой *сечением* случайного процесса в момент времени *.* Поэтому нельзя утверждать, что случайный процесс в данный момент времени имеет такое-то детерминированное значение, можно говорить лишь о вероятности того, что в данный момент времени значение случайного процесса как случайной величины будет находиться в определенных пределах.



Рис. 1.9. Реализации случайного процесса

Статистические методы изучают не каждую из реализаций , образующих множество , а свойства всего множества в целом при помощи усреднения свойств, входящих в него реализаций. Поэтому при исследовании объекта управления судят о его поведении не по отношению к какому-либо определенному воздействию, представляющему заданную функцию времени, а по отношению к целой совокупности воздействий.

Как известно, статистические свойства случайной величины определяют по ее функции распределения вероятностей интегральной и дифференциальной *.*

Для случайного процесса также вводят понятие функции распределения  и плотности вероятности , которые зависят от фиксированного момента времени наблюдения  и от некоторого выбранного уровня ,т.е. являются функциями двух переменных  и .

Рассмотрим случайную величину **, т.е. сечение случайного процесса в момент времени . *Одномерной функцией распределения* случайного процесса  называют вероятность того, что текущее значение случайного процесса ** в момент времени  не превышает некоторого заданного уровня (числа) **, т.е.

 (1.43)

Если функция  имеет частную производную по , т.е.

, (1.44)

то функцию  называют *одномерной плотностью вероятности* случайного процесса. Величина

 (1.45)

представляет собой вероятность того, что  находится в момент времени  в интервале от  до .

В каждые отдельные моменты времени наблюдаемые случайные величины (сечения случайного процесса)  будут иметь свои, в общем случае разные, одномерные функции распределения  и плотности вероятности .

Функции  и  являются простейшими статистическими характеристиками случайного процесса. Они характеризуют случайный процесс изолированно в отдельных его сечениях, не раскрывая взаимной связи между сечениями случайного процесса, т.е. между возможными значениями случайного процесса в различные моменты времени.

Знания этих функций еще недостаточно для описания случайного процесса в общем случае. Необходимо охарактеризовать также взаимную связь случайных величин в различные произвольно взятые моменты времени.

Рассмотрим теперь случайные величины  и , относящиеся к двум разным моментам времени  и  наблюдения случайного процесса.

Вероятность того, что случайный процесс  будет не больше  при  и не больше при ,т.е.

, (1.46)

называют *двумерной функцией распределения*. Если функция  имеет частные производные по  и , т.е.

, (1.47)

то функцию называют *двумерной плотностью вероятности*.

## Величина



(1.48)

равна вероятности того, что  при  будет находиться в интервале от  до , а при в интервале от  до .

Аналогично можно ввести понятие о *п-мерной функции распределения*  и *п-мерной плотности вероятности* .

Чем выше порядок , тем полнее описываются статистические свойства случайного процесса. Зная -мерную функцию распределения, можно найти по ней одномерную, двумерную и другие [вплоть до -й] функции распределения более низкого порядка. Однако многомерные законы распределения случайных процессов являются сравнительно громоздкими характеристиками и с ними крайне трудно оперировать на практике. Поэтому при изучении случайных процессов часто ограничиваются случаями, когда для описания случайного процесса достаточно знать только его одномерный или двумерный закон распределения.

Примером случайного процесса, который полностью характеризуется одномерной плотностью вероятности, является так называемый чистый случайный процесс, или *белый шум.* Значения  в этом процессе, взятые в разные моменты времени , совершенно независимы друг от друга, как бы близко ни были выбраны эти моменты времени. Это означает, что кривая белого шума содержит всплески, затухающие за бесконечно малые промежутки времени. Поскольку значения , например, в моменты времени  и  независимы, то вероятность совпадения событий, заключающихся в нахождении  между  и  в момент времени  и между  и  в момент , равна произведению вероятностей каждого из этих событий, поэтому

 (1.49)

и вообще для белого шума

, (1.50)

т. е. все плотности вероятности белого шума определяются из одномерной плотности вероятности.

Для случайных процессов общего вида, если известно, какие значения приняла величина  в момент времени , тем самым имеем некоторую информацию относительно , где , так как величины  и , вообще говоря, зависимы. Если кроме  известна , где , то информация о  еще более увеличивается. Таким образом, увеличение наших знаний о поведении процесса до момента  приводит к тому, что увеличивается информация о .

Однако существует особый класс случайных процессов, впервые исследованных известным математиком А. А. Марковым и называемых *марковскими случайными процессами*, для которых знание значения процесса в момент  уже содержит в себе всю информацию о будущем ходе процесса, какую только можно извлечь из поведения процесса до этого момента. В случае марковского случайного процесса для определения вероятностных характеристик процесса в момент времени  достаточно знать вероятностные характеристики для любого одного предшествующего момента времени, например непосредственно предшествующего момента времени . Знание вероятностных характеристик процесса для других предшествующих значений времени, например , не прибавляет информации, необходимой для нахождения .

Для марковского процесса справедливо следующее соотношение:

, (1.51)

т. е. все плотности вероятности марковского процесса определяются из двумерной плотности вероятности. Другими словами, марковские случайные процессы полностью характеризуются двумерной плотностью вероятности.

Понятие о функции распределения и плотности вероятности случайного процесса обычно используют при теоретических построениях и определениях. В практике исследования широкое распространение получили сравнительно более простые, хотя и менее полные характеристики случайных процессов, аналогичные числовым характеристикам случайных величин. Примерами таких характеристик служат математическое ожидание, дисперсия, среднее значение квадрата случайного процесса, корреляционная функция, спектральная плотность и другие.

*Математическим ожиданием* (средним значением)  случайного процесса  называют величину

 (1.52)

где * —* одномерная плотность вероятности случайного процесса *.*

Математическое ожидание случайного процесса  представляет собой некоторую неслучайную (регулярную) функцию времени ,около которой группируются и относительно которой колеблются все реализации данного случайного процесса (рис. 1.10).

Математическое ожидание случайного процесса в каждый фиксированный момент времени  равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса . Математическое ожидание называют *средним значением случайного процесса по множеству* (средним по ансамблю, статистическим средним), поскольку оно представляет собой вероятностно усредненное значение бесконечного множества реализаций случайного процесса.

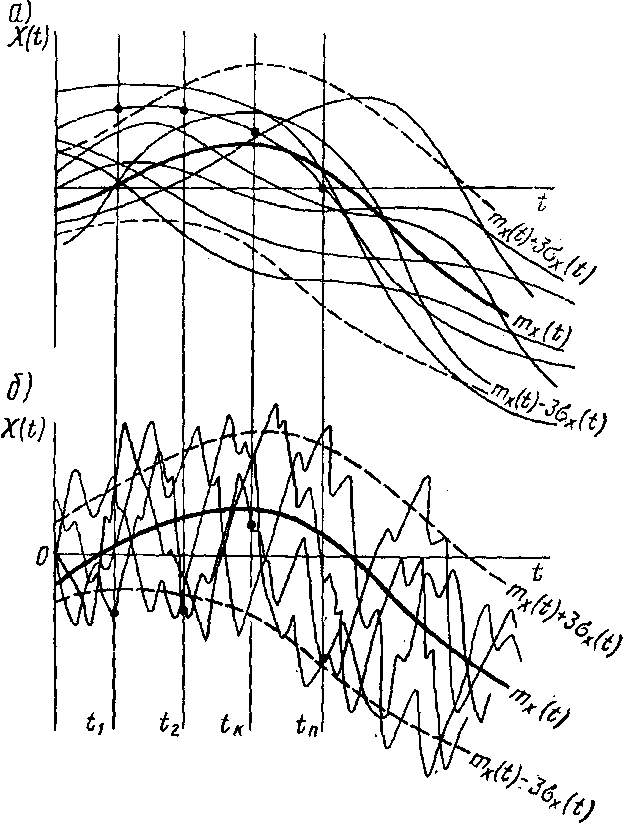


Рис. 1.10. Числовые характеристики случайных процессов

Часто вводят в рассмотрение *центрированный* *случайный процесс*

. (1.53)

Тогда случайный процесс  можно рассматривать как сумму двух составляющих: регулярной составляющей, равной математическому ожиданию , и центрированной случайной составляющей, т.е.

. (1.54)

Для того чтобы учесть степень разбросанности реализации случайного процесса относительно его среднего значения, вводят понятие *дисперсии* случайного процесса, которая равна математическому ожиданию квадрата центрированного случайного процесса:

. (1.55)

Дисперсия случайного процесса является неслучайной (регулярной) функцией времени, значение которой в каждый момент времени равно дисперсии соответствующего сечения  случайного процесса.

*Среднее квадратическое отклонение* случайного процесса равно

. (1.56)

1.6. Корреляционные функции случайных процессов

Математическое ожидание и дисперсия являются важными характеристиками случайного процесса, но они не дают достаточного представления о том, какой характер будут иметь отдельные реализации случайного процесса. Это хорошо видно из рис. 1.10, где показаны реализации двух случайных процессов, совершенно различных по своей структуре, хотя и имеющих одинаковые значения математического ожидания и дисперсии. Штриховыми линиями на рис. 1.10. показаны значения  для случайных процессов.

Процесс, изображенный на рис. 1.10, *а*,от одного сечения к другому протекает сравнительно плавно, а процесс на рис. 1.10, *б* обладает сильной изменчивостью от сечения к сечению. Поэтому статистическая связь между сечениями в первом случае больше, чем во втором, однако ни по математическому ожиданию, ни по дисперсии этого установить нельзя.

Чтобы в какой-то мере охарактеризовать внутреннюю структуру случайного процесса, т.е. учесть связь между значениями случайного процесса в различные моменты времени или, иными словами, учесть степень изменчивости случайного процесса, вводят понятие о корреляционной (автокорреляционной) функции случайного процесса [4].

*Корреляционной (или автокорреляционной) функцией случайного процесса  называют неслучайную функцию двух аргументов , которая для каждой пары произвольно выбранных значений аргументов (моментов времени)  и  равна математическому ожиданию произведения двух случайных величин  и  соответствующих сечений случайного процесса:*

. (1.57)

Корреляционную функцию для центрированной случайной составляющей называют центрированной и определяют из соотношения

 (1.58)

*Часто функцию называют ковариационной, а  – автокорреляционной.*

Различные случайные процессы в зависимости от того, как изменяются их статистические характеристики с течением времени, делят на *стационарные* и *нестационарные.* Различают стационарность в узком смысле и стационарность в широком смысле.

*Стационарным в узком смысле* называют случайный процесс ,если его -мерные функции распределения и плотности вероятности при любом  не зависят от положения начала отсчета времени . Это означает, что два процесса  и  имеют одинаковые статистические свойства для любого , т. е. статистические характеристики стационарного случайного процесса неизменны во времени. Стационарный случайный процесс – это своего рода аналог установившегося процесса в динамических системах.

*Стационарным в широком смысле* называют случайный процесс , математическое ожидание которого постоянно:

 (1.59)

а корреляционная функция зависит только от одной переменной — разности аргументов :

**. (1.60)

Понятие случайного процесса, стационарного в широком смысле, вводится тогда, когда в качестве статистических характеристик случайного процесса используются только математическое ожидание и корреляционная функция. Часть теории случайных процессов, которая описывает свойства случайного процесса через его математическое ожидание и корреляционную функцию, называют *корреляционной теорией.*

Для случайного процесса с нормальным законом распределения математическое ожидание и корреляционная функция полностью определяют его *n*-мерную плотность вероятности. Поэтому *для нормальных случайных процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают.*

Теория стационарных процессов разработана наиболее полно и позволяет сравнительно просто производить расчеты для многих практических случаев. Поэтому допущение о стационарности иногда целесообразно делать также и для тех случаев, когда случайный процесс хотя и нестационарен, но на рассматриваемом отрезке времени работы системы статистические характеристики сигналов не успевают сколь-нибудь существенно измениться.

В теории случайных процессов пользуются двумя понятиями средних значений. Первое понятие о среднем значении — это *среднее значение по множеству* (или математическое ожидание), которое определяется на основе наблюдения над множеством реализаций случайного процесса в один и тот же момент времени. Среднее значение по множеству принято обозначать волнистой чертой над выражением, описывающим случайную функцию:

. (1.61)

В общем случае среднее значение по множеству является функцией времени .

Другое понятие о среднем значении – это *среднее значение по времени*, которое определяется на основе наблюдения за отдельной реализацией случайного процесса  на протяжении достаточно длительного времени . Среднее значение по времени обозначают прямой чертой над соответствующим выражением случайной функции и определяют по формуле

, (1.62)

если этот предел существует.

Среднее значение по времени в общем случае различно для отдельных реализаций множества, определяющих случайный процесс.

Вообще для одного и того же случайного процесса среднее по множеству и среднее по времени различны, однако для так называемых *эргодических стационарных случайных процессов* среднее значение по множеству совпадает со средним значением по времени:

. (1.63)

В соответствии с эргодической теоремой для стационарного случайного процесса корреляционную функцию можно определить как среднее по времени одной реализации

 (1.64)

где  *—* любая реализация случайного процесса.

Центрированная корреляционная функция эргодического стационарного случайного процесса

 (1.65)

Из выражения (1.65), можно заметить, что *дисперсия стационарного случайного процесса равна начальному значению центрированной корреляционной функции *:

. (1.66)

Связь между дисперсией и корреляционной функцией ** определена следующим соотношением

. (1.67)

Статистические свойства связи двух случайных процессов *X*(*t*)и *U*(*t*) можно охарактеризовать *взаимной корреляционной функцией*, которая для каждой пары произвольно выбранных значений аргументов  и  равна

 (1.68)

Согласно эргодической теореме для стационарного случайного процесса можно записать

, (1.69)

где и  *—* любые реализации стационарных случайных процессов  и  соответственно.

Взаимная корреляционная функция  характеризует взаимную статистическую связь двух случайных процессов  и в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени . Значение характеризует эту связь в один и тот же момент времени.

## Из (1.69) следует, что

. (1.70)

Если случайные процессы  и  статистически не связаны друг с другом и имеют равные нулю средние значения, то их взаимная корреляционная функция для всех *τ* равна нулю. Однако обратный вывод о том, что если взаимная корреляционная функция равна нулю, то процессы независимы, можно сделать лишь в отдельных случаях (в частности, для процессов с нормальным законом распределения), общей же силы обратный закон не имеет.

Центрированная корреляционная функция для неслучайных функций времени тождественно равна нулю. Однако корреляционная функция может вычисляться и для неслучайных (регулярных) функций. Заметим, однако, что когда говорят о корреляционной функции регулярной функции , то под этим понимают просто результат формального применения к регулярной функции  операции, выражаемой интегралом (1.64).

Приведем некоторые основные свойства корреляционных функций  [4].

Начальное значение корреляционной функции равно среднему значению квадрата случайного процесса

. (1.71)

Конечное значение корреляционной функции равно квадрату среднего значения случайного процесса

. (1.72)

Значение корреляционной функции при любом  не может превышать ее начального значения, т.е.

. (1.73)

Корреляционная функция есть четная функция от , т.е.

. (1.74)

Корреляционная функция суммы случайных процессов  определяется выражением

 (1.75)

Если каждая реализация  тождественно равна постоянному случайному параметру  с определенным распределением вероятностей, то этим вполне определяется случайный процесс. Такой процесс является стационарным, но не эргодическим. Корреляционная функция процесса  равна квадрату этой постоянной величины  (рис. 1.11, *а*)*.*

****, (1.76)

а математическое ожидание

. (1.77)

Корреляционная функция периодической функции, например, , представляет собой косинусоиду (рис. 1.11, *д*),т.е.

, (1.78)

имеющую ту же частоту , что и , и не зависящую от сдвига фазы .



Рис. 1.11. Реализации случайных процессов и их характеристики

Корреляционная функция временной функции, разлагаемой в ряд Фурье

,

имеет на основании изложенного выше следующий вид

. (1.79)

Корреляционная функция стационарного случайного процесса, на который наложена периодическая составляющая с частотой , также будет содержать периодическую составляющую той же частоты.

Это обстоятельство можно использовать как один из способов обнаружения «скрытой периодичности» в случайных процессах, которая может не обнаруживаться при первом взгляде на отдельные записи реализации случайного процесса.

Примерный вид корреляционной функции процесса , содержащего в своем составе кроме случайной также и периодическую составляющую, показан на рис. 1.12, где  обозначена (штриховая линия) корреляционная функция, соответствующая случайной составляющей.



Рис. 1.12. Корреляционная функция стационарного

случайного процесса с периодической составляющей

Чтобы выявить скрытую периодическую составляющую (такая задача возникает, например, при выделении малого полезного сигнала на фоне большой помехи), лучше всего определить корреляционную функцию для больших значений , когда случайный сигнал уже сравнительно слабо коррелирован и случайная составляющая слабо сказывается на виде корреляционной функции.

Типичная корреляционная функция стационарного случайного процесса с не равным нулю средним значением, не содержащего скрытых периодичностей, приведена на рис. 1.13.



#### Рис. 1.13. Корреляционная функция без периодической составляющей

Если среднее значение случайного процесса равно нулю, то его типичная корреляционная функция (совпадающая с центрированной корреляционной функцией) будет иметь вид, представленный на рис.1.11, *б*, *в*. В этом случае ее можно аппроксимировать следующим аналитическим выражением:

, (1.80)

где ** — дисперсия;  — параметр затухания.

С ростом *τ* связь между  и  ослабевает и корреляционная функция становится меньше. На рис. 1.11, *б*, *в* приведены, например, две корреляционные функции и две соответствующие им реализации случайного процесса. Легко заметить, что корреляционная функция, соответствующая случайному процессу с более тонкой структурой, убывает быстрее. Другими словами, чем более высокие частоты присутствуют в случайном процессе, тем быстрее убывает соответствующая ему корреляционная функция.

Иногда встречаются корреляционные функции, которые могут быть аппроксимированы аналитическим выражением

, (1.81)

где — дисперсия;  — параметр затухания;  — резонансная частота.

Корреляционные функции подобного вида имеют, например, случайные процессы типа турбулентности атмосферы, фединга радиолокационного сигнала, углового мерцания цели и т. п.

Выражения (1.80) и (1.81) часто используются для аппроксимации корреляционных функций, полученных в результате обработки экспериментальных данных.

Чем слабее взаимосвязь между предыдущими  и последующими  значениями случайного процесса, тем быстрее убывает корреляционная функция . Время , при котором имеет место неравенство, либо

,

где  — достаточно малая величина, называют *временем корреляции* стационарного случайного процесса.

Случайный процесс, в котором отсутствует связь между предыдущими и последующими значениями, называют чистым случайным процессом или белым шумом. В случае белого шума время корреляции , и корреляционная функция представляет собой - функцию **(**см. рис. 1.11, *г*):

**,** (1.82)

где *.*

При решении практических задач часто пользуются *нормированной корреляционной функцией*

. (1.83)

Нормированная корреляционная функция удобна тем, что всегда . Иногда в рассмотрение вводят нормированную взаимную корреляционную функцию

, (1.84)

причем можно показать, что .

**1.7. Спектральные плотности случайных процессов**

*Спектральная плотность*  *стационарного случайного процесса  определяется как преобразование Фурье корреляционной функции* , т.е.

. (1.85)

Спектральная плотность является действительной и четной функцией частоты 

. (1.86)

Поэтому на графике спектральная плотность всегда симметрична относительно оси ординат.

Если спектральная плотность известна, то по формуле обратного преобразования Фурье можно найти соответствующую ей корреляционную функцию:

. (1.87)

*Взаимная спектральная плотность  двух стационарных случайных процессов  и  определяется как преобразование Фурье от взаимной корреляционной функции *, т.е.

. (1.88)

Взаимная спектральная плотность  является мерой статистической связи между двумя стационарными случайными процессами ** и **. Если процессы  и  некоррелированы и имеют равные нулю средние значения, то взаимная спектральная плотность равна нулю, т.е.

*.* (1.89)

В отличие от спектральной плотности  взаимная спектральная плотность  является нечетной функцией  и представляет собой не вещественную, а комплексную функцию

. (1.90)

Центрированному случайному процессу , имеющему центрированную корреляционную функцию **, соответствует *центрированная спектральная плотность* , т.е.

. (1.91)

Зная центрированную спектральную плотность , по формуле обратного преобразования Фурье можно найти соответствующую ей центрированную корреляционную функцию:

. (1.92)

Зависимость между дисперсией  и спектральной плотностью  для центрированного случайного процесса:

. (1.93)

Рассмотрим некоторые свойства спектральных плотностей  [4].

Спектральная плотность чистого случайного процесса, или белого шума, постоянна во всем диапазоне частот (см. рис. 1.11, *г*):

. (1.94)

Постоянство спектральной плотности белого шума во всем бесконечном диапазоне частот означает, что энергия белого шума распределена по всему спектру равномерно, а суммарная энергия процесса равна бесконечности. Это указывает на физическую нереализуемость случайного процесса типа белого шума. Белый шум является математической идеализацией реального процесса. В действительности частотный спектр  западает на очень высоких частотах (как показано пунктиром на рис. 1.11, *г*).Если, однако, эти частоты настолько велики, что при рассмотрении какого-либо конкретного устройства они не играют роли (ибо лежат вне полосы частот, пропускаемых этим устройством), то идеализация сигнала в виде белого шума упрощает рассмотрение и поэтому вполне целесообразна.

Происхождение термина «белый шум» объясняется аналогией такого процесса с белым светом, имеющим одинаковые интенсивности всех компонент, и тем, что случайные процессы типа белого шума впервые были выделены при исследовании тепловых флуктуационных шумов в радиотехнических устройствах.

Спектральная плотность постоянного сигнала представляет собой -функцию, расположенную в начале координат (см. рис. 1.11, *a*), т.е.

. (1.95)

Тот факт, что спектральная плотность  представляет собой -функцию при , означает, что вся мощность постоянного сигнала сосредоточена на нулевой частоте, что и следовало ожидать.

Спектральная плотность периодического сигнала  представляет собой две -функции, расположенные симметрично относительно начала координат при  и  (см. рис. 1.11, *д*), т*.*е.

. (1.96)

Тот факт, что спектральная плотность  представляет собой две -функции, расположенные при , и , означает, что вся мощность периодического сигнала сосредоточена на двух частотах: , и . Если рассматривать спектральную плотность только в области положительных частот, то получим, что вся мощность периодического сигнала будет сосредоточена на одной частоте .

Спектральная плотность временной функции, разлагаемой в ряд Фурье,  имеет на основании изложенного выше вид

. (1.97)

Этой спектральной плотности соответствует линейчатый спектр (рис. 1.14) с -функциями, расположенными на положительных и отрицательных частотах гармоник. На рис. 1.14 -функции условно изображены так, что их высоты показаны пропорциональными коэффициентам при единичной -функции, т.е. величинам  и .

## Заметим, что спектральная плотность не содержит так же, как и корреляционная функция, никаких сведений о фазовых сдвигах отдельных гармонических составляющих.



Рис. 1.14. Спектральная плотность ряда Фурье

Спектральная плотность случайного процесса, не содержащего периодической составляющей, представляет собой график без ярко выраженных пиков (см. рис. 1.11, *б, в*).

В этом случае спектральная плотность часто аппроксимируется следующим аналитическим выражением:

, (1.98)

где ** — дисперсия случайного процесса;  — параметр затухания;  — постоянный коэффициент.

Спектральной функции, определяемой по (1.98), соответствует корреляционная функция

,

которая полностью совпадает с корреляционной функцией, определяемой по (1.80).

Из рис. 1.11, *б*, *в* видно, что чем шире график спектральной плотности , тем «уже» график соответствующей корреляционной функции ,и наоборот. Это соответствует физической сущности процесса: чем шире график спектральной плотности, т. е. чем более высокие частоты представлены в спектральной плотности, тем выше степень изменчивости случайного процесса и тем «уже» график корреляционной функции. Другими словами, связь между видом спектральной плотности и видом функции времени получается обратной по сравнению со связью между корреляционной функцией и видом функции времени. Это особенно ярко проявляется при рассмотрении постоянного сигнала и белого шума. В первом случае корреляционная функция имеет вид горизонтальной прямой, а спектральная плотность имеет вид -функции (см. рис. 1.11, *а*). Во втором случае (см. рис. 1.11, *е*) имеет место обратная картина.

Спектральная плотность случайного процесса, на который наложены периодические составляющие, содержит непрерывную часть и отдельные -функции, соответствующие частотам периодических составляющих.

Отдельные пики на графике спектральной плотности указывают на то, что случайный процесс смешан со скрытыми периодическими составляющими, которые могут и не обнаруживаться при первом взгляде на отдельные записи процесса. Если, например, на случайный процесс наложен один периодический сигнал с частотой с , то график спектральной плотности будет иметь вид, показанный на рис. 1.15.



Рис. 1.15. График спектральной плотности с наложенным

периодическим сигналом с частотой 

**1.8. Случайные процессы в динамических системах**

Рассмотрим линейную динамическую систему, имеющую передаточную функцию  и импульсную переходную функцию (весовую функцию)  (рис. 1.16).



Рис. 1.16. Прохождение случайного сигнала через линейное динамическое звено

Предположим, что на вход этой системы подан стационарный случайный процесс , имеющий корреляционную функцию  и спектральную плотность . Если рассматриваемая линейная система устойчива и сама стационарна, то установившийся выходной сигнал  также будет стационарным случайным процессом, однако его статистические характеристики будут отличаться от статистических характеристик входного сигнала.

Допустим, что случайный процесс  имеет корреляционную функцию  и спектральную плотность . Установим связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями случайных процессов на входе и выходе системы. Связь между реализациями  случайного процесса  на выходе системы и соответствующими реализациями  случайного процесса  на входе системы на основании формулы свертки выражается через импульсную переходную функцию  следующим образом:

, (1.99)

где  — независимая переменная интегрирования.

Корреляционная функция  стационарного случайного процесса  на основании (1.64) равна

. (1.100)

Подставляя в (1.100) значение из (1.99) и изменяя последовательность интегрирования, получим

, (1.101)

где  — обозначение новой независимой переменной интегрирования.

Выражение (1.101) является основным интегральным соотношением, позволяющим по известной корреляционной функции  случайного процесса на входе системы и известной импульсной переходной функции  системы найти корреляционную функцию  случайного процесса на выходе системы.

Взаимная корреляционная функция равна

. (1.102)

Определим теперь связь между спектральными плотностями входного и выходного случайных процессов. В соответствии с (1.85) спектральная плотность случайного процесса  на выходе системы

. (1.103)

Подставляя в (1.103) значение  из (1.101) и проведя необходимые преобразования, окончательно получим

, (1.104)

где  — амплитудно-частотная характеристика (функция),  — вещественная частотная характеристика,  — мнимая частотная характеристика.

Таким образом, *спектральная плотность стационарного случайного процесса на выходе линейной системы равна спектральной плотности случайного процесса на входе системы, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной (амплитудно-частотной) функции этой системы.*

Взаимная спектральная плотность

. (1.105)

При прохождении через линейную динамическую систему меняются не только характеристики случайного процесса, но и их функции распределения. Причем установить закон распределения вероятностей выходного сигнала при известных статистических характеристиках входного возможно только для двух случаев:

1. входной нормально распределенный процесс  после линейного преобразования обеспечивает нормальное распределение выходного процесса ;
2. входной гармонический сигнал  со случайной фазой  обеспечивает гармонический выходной сигнал с измененной амплитудой

, (1.106)

где — частота входного гармонического случайного сигнала;  — комплексный коэффициент усиления системы;  — амплитуды входного и выходного сигналов.

При прохождении случайных сигналов через нелинейные безинерционные звенья происходит их искажение, изменение закона и параметров распределения. Аналитическое вычисление функции плотности и параметров распределения возможно для относительно простых нелинейных характеристик. В остальных случаях используют статистическое моделирование на ЭВМ.

**Пример 1.5.** На вход инерционного звена с передаточной функцией

,

подан белый шум с корреляционной функцией

,

спектральной плотностью .

Найти характеристики выходного сигнала, взаимные корреляционные функции и спектральную плотность.

Весовая функция апериодического звена 1-го порядка равна



Подставим исходные данные в выражение (1.101)





Взаимная корреляционная функция согласно (1.102) равна



Для оценки спектральной плотности найдем частотную передаточную функцию

.

Умножая числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю число , получим

.

Здесь  — вещественная частотная характеристика,  — мнимая частотная характеристика.

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики равны

,

.

Спектральная плотность выходного случайного процесса согласно (1.104) равна

.

Взаимная спектральная плотность согласно (1.105) равна

.

Согласно (1.71) мощность выходного сигнала равна

.

Конечное значение корреляционной функции согласно (1.72) равно

.

Для определения времени корреляции  воспользуемся неравенством

,

где .

Результаты расчета в системе Mathcad представлены на рис. 1.17. По графикам оценим время корреляции  с, что соответствует времени переходного процесса динамического звена .





Рис. 1.17. Результаты расчета примера 1.5

**2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

**2.1. Общие понятия и определения**

*Математическая статистика* занимается как статистическим описанием результатов *опытов и наблюдений*, так и построением и проверкой подходящих математических моделей, содержащих понятие вероятности.

Фундаментальными понятиями статистической теории являются понятия *генеральной совокупности* и *выборки*.

*Генеральная совокупность* есть совокупность всех мыслимых результатов наблюдений над случайной величиной, которые могут быть в принципе проведены при данных условиях. Содержательный смысл этого понятия заключается в том, что предполагается существование некоторых вполне определенных свойств, неслучайных закономерностей, присущих данной совокупности. Фактически эти свойства являются объективным отображением вероятностных свойств шумового поля, которые могут быть охарактеризованы с помощью соответствующих законов распределения вероятностей или связанных с ними числовых параметров. Предполагается, что свойства шумового поля не изменяются во времени, т. е. являются *устойчивыми*.

*Выборка* - это конечный набор значений случайной величины, получаемый в результате наблюдений. Например, наблюдаемые значения  – представляют выборку объема . Выборка *представительна* (репрезентативна), если она достаточно полно характеризует генеральную совокупность.

Смысл статистических методов сводится к тому, чтобы по выборке ограниченного объема  высказать обоснованное суждение о свойствах генеральной совокупности в целом. Подобное определение может быть получено путем построения *эмпирических (выборочных)* аналогов вероятностных характеристик исследуемой случайной величины или, иными словами, путем *оценивания* параметров генеральной совокупности с помощью некоторых подходящих функций от результатов наблюдений.

Любая функция  от элементов некоторой генеральной совокупности называется *статистикой*. Некоторая статистика, являющаяся подходящей для оценивания того или иного параметра  генеральной совокупности, называется *статистической (выборочной) оценкой* данного параметра. Естественно, что любая оценка неизвестного параметра ** генеральной совокупности по выборке есть случайная величина, в то время как сам параметр является неслучайным. Часто для обозначения оценок вводят символ «крышечку» ^. Так это оценка параметра .

Параметры  обычно характеризуют определенное свойство теоретического распределения случайной величины  (например, математическое ожидание, дисперсию, асимметрию). Поскольку для оценки одного и того же параметра  можно использовать разные статистики , , …, то на практике предпочитают оценки , которые сходятся по вероятности к  при  (*состоятельные оценки*), у которых (*несмещенные оценки*) или которые имеют наименьшую дисперсию (*эффективные оценки*).

**2.2. Простейшие оценки**

Для случайной выборки  объема  из генеральной совокупности можно вычислить следующие оценки.

*Накопленная частость* (накопленная относительная частота) — это оценка интегральной функции распределения, определяется по формуле

, (2.1)

где — число элементов выборки меньших текущего конкретного значения , – общий объем выборки.

*Эмпирическая функция плотности распределения вероятностей (гистограмма выборки) определяется по формуле*

, (2.2)

где  — длина интервала;  - число интервалов разбиения выборки; — число элементов выборки, попавших в –й интервал. Рекомендуется число интервалов выбирать равным

.

# Найденное значение округляют до ближайшего целого числа. Длину интервала

,

округляют для удобства построения графика.

В системе Mathcad построение эмпирической функции плотности распределения вероятностей для выборки  представлено на рис. 2.1.

# *Выборочное среднее значение*

, (2.3)

является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания. Для выборки из нормальной генеральной совокупности эта оценка также и эффективна.

Для равномерного распределения эффективная оценка  расчитывается по формуле

, (2.4)

где  — максимальное и минимальное значение выборки.

# Состоятельной, но смещенной оценкой дисперсии является

, (2.5)

а для нормальной совокупности эта оценка и эффективна.

Состоятельная и несмещенная оценка дисперсии расчитвается по формуле

. (2.6)

Эта оценка не эффективна для нормальной генеральной совокупности особенно при малых .

Для двух выборок случайных величин  и  объема каждое, выборочное значение ковариации равно

, (2.7)

а выборочное значение коэффициента корреляции

, (2.8)

где  — выборочные средние и выборочные дисперсии случайных величин  и . Данная оценка коэффициента корреляции является состоятельной и асимптотически несмещенной.

Вычисление некоторых оценок в системе Matchcad представлено на рис. 2.2.

### 

### Рис. 2.1. Моделирование в системе Matcad эмпирической и теоретической

### функции плотности распределения вероятностей

**2.3. Интервальные оценки. Доверительный интервал**

Рассмотренные точечные оценки параметров не дают информации о степени близости оценки к соответствующему теоретическому параметру . Поэтому более информативный способ оценивания неизвестных параметров заключается в построении интервала, в котором с заданной степенью достоверности будет находиться оцениваемый параметр, т. е. в построении так называемой *интервальной оценки* параметра . Интервальной оценкой параметра  называется интервал, границы которого являются функциями выборочных значений  и который с заданной вероятностью *р* накрывает оцениваемый параметр .

. (2.9)

Интервал называется *доверительным*, его границы являющиеся случайными величинами, соответственно нижним и верхним *доверительными* пределами, вероятность  - *доверительной вероятностью*, а величина  - *уровнем значимости.*

Сама по себе ширина доверительного интервала еще не характеризует высокое качество оценки . Конечно, чем уже доверительный интервал, тем в вероятностном смысле ближе оценка к истинному значению параметра . Но ширину доверительного интервала всегда следует рассматривать в совокупности с доверительной вероятностью. Иными словами, при данном объеме выборки нельзя повысить  без увеличения ширины доверительного интервала, и наоборот.

На практике, в технических приложениях, чаще всего используют значение , что соответствует уровню значимости .

Задача нахождения границ доверительного интервала решается с помощью выборочных функций распределения оценки или некоторой связанной с подходящей статистики. Чаще всего используют условие

, (2.10)

обеспечивающее для симметричного выборочного распределения размещение оценки в центре доверительного интервала



Рис. 2.2. Вычисление простейших оценок

**Пример 2.1.** Найти доверительный интервал для оценки с надежностью (с доверительной вероятностью)  неизвестного математического ожидания  нормально распределенной случайной величины , если известна дисперсия , выборочное среднее , объем выборки .

*Решение.* Доверительный интервал определен выражением

, (2.11)

где  — точность оценки,  есть такое значение аргумента функции Лапласа , при котором .

Из соотношения находим



Далее по таблице значений функции  [1] находим, что 

Подставляя все данные, получим искомый доверительный интервал

.

В случае если неизвестно теоретическое значение  и объем выборки  используют доверительный интервал [1]

, (2.12)

где –  значения -распределения Стьюдента, для числа степеней свободы  и вероятности  (для односторонней критической области), находят из таблиц [1].

*Число степеней свободы* есть разность между числом имеющихся статистических данных  и числом наложенных связей. В данном случае число связей равно единице, так как и  выражены одно через другое.

Для оценки дисперсии  при известном  используют доверительный интервал

, (2.13)

где — выборочная дисперсия, рассчитанная по выборке объема ; — значение  — хи-квадрат распределения с числом степеней свободы  и вероятности  (находится из таблиц [1]).

**Пример 2.2.** По выборке объемом  из нормальной совокупности найдено . Найти доверительный интервал, покрывающий генеральную дисперсию  с надежностью .

По таблице [1] для  и  находим . Подставляя в (2.13), получим .

В случае если  неизвестно, справедливо следующее соотношение

. (2.14)

Приведенные в данном параграфе формулы справедливы для нормального распределения случайной величины  при условии, что наблюдения в выборке *независимы*.

**2.4. Проверка статистических гипотез о параметрах распределения**

*Статистическая гипотеза* есть некоторое предположение относительно свойств генеральной совокупности, из которой извлекается выборка.

*Критерий* статистической гипотезы – это правило, позволяющее отвергнуть или принять данную гипотезу на основании выборки. При этом широко используются функции результатов наблюдений или, как говорят, *статистики для проверки гипотез*. Все возможные значения подобных статистик делятся на две части: области принятия гипотезы и критическую область, в которой принимается решение отвергнуть гипотезу.

*Проверка гипотезы* заключается в сопоставлении некоторых статистических показателей, критериев проверки, вычисляемых по данным выборки в предположении, что проверяемая гипотеза верна.

*Нулевой (основной)* называют выдвинутую гипотезу .

*Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу , которая противоречит нулевой.

В итоге проверки гипотез могут быть допущены ошибки двух родов. *Ошибка первого рода* состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называется *уровнем значимости* критерия и обозначают буквой .

*Ошибка второго рода* состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают .

Рассмотрим методы проверки некоторых статистических гипотез.

***Задача 2.1*.** Необходимо сравнить выборочное среднее с гипотетической генеральной средней (математическим ожиданием) нормальной совокупности. Или, другими словами, необходимо проверить гипотезу о равенстве ** заданному значению , т.е.

 (2.15)

Допустим, что дисперсия генеральной совокупности  неизвестна. В качестве статистики, т.е. функции результатов наблюдений, используют величину

, (2.16)

называемую -критерием и распределенную по закону Стьюдента с числом степеней свободы .

Если вычисленное значение  не превышает критического , найденного из таблицы теоретического распределения, то исходная нулевая гипотеза принимается, в противном случае она отвергается.

Рассмотрим некоторые часто используемые гипотезы на примерах, приведенных в [1].

**Пример 2.3.** Проверить гипотезу о равенстве нулю  c 10 % уровнем значимости, если при обработке выборки  получено . Найдем значение -критерия

.

Табличное значение  для  и , равно  (из таблиц [1]). Поскольку , то нулевая гипотеза  должна быть отвергнута, т.е. математическое ожидание генеральной совокупности не равно нулю.

***Задача 2.2.***Необходимо произвести сравнение выборочных дисперсий , полученных из двух независимых выборок объемом  и , извлеченных из нормальных генеральных совокупностей, т.е.

 (2.17)

Для проверки гипотезы применяется -критерий (дисперсионное отношение)

, (2.18)

где в числителе записано максимальное значение из .

Для выбранного уровня значимости  находят границу критической области из таблиц -распределения Фишера с числом степеней  и  [1]. Причем  для дисперсии числителя. Если , то нуль-гипотеза о равенстве двух генеральных дисперсий отвергается, и наоборот.

**Пример 2.4.** Имеются две выборки объемом  и , для которых рассчитаны оценки  и .

Проверим нуль-гипотезу о равенстве дисперсий при . Находим

.

По таблице [1] находим для .

Поскольку , то принимаем нуль-гипотезу.

***Задача 2.3.*** Произвести сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема, т.е. проверить гипотезу

 (2.19)

Для проверки вычисляют

. (2.20)

Далее по таблице распределения Кохрена находят критическую точку  [1]. Если  нет оснований отвергать нулевую гипотезу, иначе нулевую гипотезу отвергают.

**Пример 2.5**. По четырем независимым выборкам одинакового объема , извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены

.

Необходимо при уровне значимости  и  проверить гипотезу (2.19), а также оценить генеральную дисперсию.

Вычислим согласно (2.20)

.

Из таблиц [1] находим

.

Поскольку , то принимаем , т.е. выборочные дисперсии различаются незначимо.

Поскольку однородность дисперсий установлена, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую

.

***Задача 2.4.*** Произвести сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки).

Для этого необходимо проверить гипотезу

 (2.21)

в предположении, что неизвестные дисперсии равны .

Для проверки необходимо вычислить

 (2.22)

и по таблице распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости *q* и числу степеней свободы  найти критическую точку .

Если  — нулевую гипотезу отвергают. Если — нулевую гипотезу принимают.

**Пример 2.6.** По двум независимым выборкам  и , извлеченных из нормальных генеральных совокупностей  и , найдены выборочные средние и дисперсии    . Требуется при уровне значимости  проверить гипотезу (2.21).

*Решение*. Поскольку выборочные дисперсии различны, поэтому предварительно проверим гипотезу о равенстве дисперсий (2.17). Вычислим

.

Для  и  и  находим из таблиц Фишера [1] (в предположении ) . Так как  — нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий. Поскольку предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, сравним средние.

# Вычислим



Для  и , находим из таблиц -распределение Стьюдента .

Так как  нулевую гипотезу о равенстве математических ожиданий генеральных распределений отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

***Задача 2.5****.* Проверить гипотезу о значимости выборочного коэффициента корреляции двух нормально распределенных случайных величин  и , т.е. проверить гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности

 (2.23)

Для проверки гипотезы необходимо вычислить

, (2.24)

и найти по таблице критических точек распределения Стьюдента для заданного уровня значимости и числа степеней свободы , где  — объем выборки, .

Если — нулевую гипотезу отвергают, и наоборот.

**Пример 2.7.** По выборке , извлеченной из двумерной нормальной совокупности  найден выборочный коэффициент корреляции .

Для  проверить гипотезу (2.23)

*Решение*. Вычислим

.

По таблице Стьюдента находим .

Поскольку — отвергаем нулевую гипотезу, т.е. выборочный коэффициент корреляции  значимо отличается от нуля и следовательно случайные величины  и  коррелированны.

***Задача 2.6.*** Рассчитать необходимый объем выборки для получения оценки математического ожидания с заданной точностью  и доверительной вероятностью , если известны оценки дисперсии  и , вычисленные по двум выборкам малого объема из одной генеральной совокупности.

*Решение.* Вычисляем

.

По заданной вероятности  находим значение функции Лапласа .

По значению  из таблиц [1] находим -аргумент функции 

## Находим необходимый объем выборки

.

Кроме рассмотренных возможны многие другие постановки задач проверки статистических гипотез, приведенные в [1].

**2.5. Критерии согласия**

*Критерием согласия* называется критерий гипотезы о том, что генеральная совокупность имеет распределение предполагаемого типа. Эти критерии основаны на выборе определенной меры расхождения между теоретическим и эмпирическим распределением. Если такая мера расхождения (т. е. критерий) для рассматриваемого случая превосходит установленный предел, то гипотеза бракуется. Одним из наиболее распространенных параметрических критериев является критерий  (критерий Пирсона).

Рассмотрим проверку гипотезы о нормальном распределении генеральной (теоретической) совокупности.

Пусть имеем эмпирическое распределение, полученное по результатам выборки (см. 2.2),

|  |  |
| --- | --- |
|  | - варианты (центры - интервалов квантования) |
| - частоты (число попавших значений выборки в интервал квантования). |

При этом желательно, чтобы число . Если в каком-то интервале , то его объединяют с соседним интервалом так, чтобы . При этом число интервалов  уменьшится.

Для проверки гипотезы при уровне значимости  необходимо:

1. вычислить выборочное среднее и дисперсию ;
2. вычислить теоретические частоты

,

где — объем выборки,  - интервал квантования,

,.

1. сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого находят

;

- по таблице  распределения для уровня значимости  и числа степеней свободы  находят ;

- если , то нет оснований отвергать гипотезу о нормальности распределения генеральной совокупности. Другими словами, выборочные (эмпирические) и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если , то гипотезу о нормальности отвергают.

Если гипотеза принимается, то можно выровнять гистограмму с помощью функции плотности вероятности нормального распределения. Далее можно проводить анализ отклонений теоретической и эмпирической функций распределения.

Пример проверки гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по выборке объема  в системе Mathcad приведен на рис. 2.3.

Алгоритм проверки гипотезы о равномерном, показательном, Пуассона, биноминальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона с примерами приведен в [1].

Сведения о непараметрических критериях согласия Колмогорова, Смирнова можно найти в литературе по математической статистике.

**2.6. Последовательный анализ**

В задачах статистического контроля качества продукции имеется класс задач приемочного контроля по признаку «годен-негоден» или «исправно-дефектно» и контроль распределения продукции по сортам.

При этом случайная величина  принимает два значения: 0 — годная деталь и 1 — дефектная деталь. Пусть  означает относительное число дефектных изделий. Тогда величина  с вероятностью  примет значение 1 и с вероятностью  значение 0. Таким образом, задача о пригодности данной партии, решение которой дается на основании выборочной проверки, сводится к проверке гипотезы о том, что , против гипотезы . Здесь  — граничная вероятность или допущенное относительное число дефектных деталей.



Рис. 2.3. Проверка гипотезы о нормальном распределении

генеральной совокупности

Это так называемый качественный контроль. Наиболее часто используют три вида контроля по качественному признаку: однократная выборка, двукратная выборка и последовательный анализ.

Суть однократной выборки состоит в том, что из партии объемом  случайным образом отбирается  изделий. Если после проверки всех  изделий в них оказалось  дефектных изделий и , то вся партия деталей бракуется. Здесь  — это приемочное число, которое заранее рассчитывается исходя из характеристик партии и требований к качеству продукции. Метод прост, но число подвергаемых к испытанию изделий значительно, а следовательно значительны и издержки на контроль.

При двукратной выборке из партии объема методом случайного отбора составляется первая выборка , как правило, меньшая, чем при однократной выборке для одних и тех же условий. Если число дефектных изделий , то партия признается годной. Если , то партия бракуется. А при условии, что , назначается вторая выборка объемом . Если число дефектных изделий в двух выборках превосходит заданное число , то партия бракуется. Здесь , ,  — приемочные числа. Издержки двойного контроля  от издержек однократной выборки.

Последовательный анализ был предложен А. Вальдом [5]. Суть его состоит в том, что на каждом испытании вычисляют последовательный критерий отношений вероятностей гипотезы  относительно конкурирующей гипотезы .

 (2.25)

Если на -ом шаге (испытании)

, (2.26)

то процесс заканчивается отклонением гипотезы .

Если

, (2.27)

то процесс заканчивается отклонением гипотезы .

Если

, (2.28)

то производится следующее испытание.

Здесь  — вероятность получения выборки  с параметром , а  — соответственно с параметром , где  и  — верхняя и нижняя границы относительного числа дефектных изделий.

Значения

, (2.29)

, (2.30)

где  — вероятность ошибки 1-го рода, — вероятность ошибки 2-го рода.

На практике вместо неравенств (2.26, 2.27, 2.28) используют следующие эквивалентные неравенства

, (2.31)

, (2.32)

 (2.33)

Здесь

 — приемочное число;

 — браковочное число;

 — число дефектных изделий среди первых  проверенных, т.е. на -омиспытании.

Поскольку значения , , ,  задаются до начала испытаний, то нетрудно видеть, что приемочное и браковочное числа представляют собой прямые линии, зависящие только от *m* и могут быть вычислены и построены заранее (априори).

**Пример 2.8.** Пусть , , ,  [5].

В табл. 2.1. представлены результаты табличного метода проведения контроля. Число дефектных изделий  задается. Остальные параметры рассчитываются.

Таблица 2.1

**Результаты контроля**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *m* номер наблюдения (испытания) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| *am* приемочное число | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| *dm* число дефектных изделий, всего | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 |
| *rm* браковочное число | .. | .. | .. | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |

В табл. 2.1. приведено округление  до ближайшего целого числа ,  соответственно до ближайшего целого числа .

Результаты графического метода проведения контроля по данным табл. 2.1 и расчета в системе Mathcad представлены на рис. 2.4.

Пусть *Х* – случайная величина, распределенная по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием  и известным средним квадратическим отклонением . Необходимо, используя последовательный анализ, проверить гипотезу

 (2.34)

где  – нижняя и верхняя граница приемки контролируемого параметра изделия (например, диаметра детали).

Если , то следует забраковать партию, при  – принять, иначе продолжить испытания (зона безразличия).

Процесс проверки гипотезы (2.34) последовательным анализом выглядит следующим образом. Для каждого текущего испытания  проверяется неравенство

, (2.35)

где приемочное число

,

и браковочное число

,

**, ** – определены выражениями (2.29) и (2.30).

 – последовательно наблюдаемые значения  (например, диаметра детали).



Партия принимается

#### Партия

бракуется

##### Контроль

##### продолжается

Рис. 2.4. Результаты графического метода приемки последовательным анализом

Если условие (2.35) выполняется, то процесс испытания (контроля) продолжается.

Как только в первый раз на *m*-ом шаге

,

партия бракуется, и если

,

партия принимается.

**Пример 2.9.** Пусть, , , , .

Результаты наблюдений и расчетов приведены в табл. 2.2 [5].

Таблица 2.2

**Результаты контроля**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *m*  номер наблюдения | *am*  приемочное  число | *х*  наблюдаемые значения | накопленная сумма наблюдаемых значений | *rm*  браковочное число |
|  | … | 151 | 151 | 334 |
|  | 139 | 144 | 295 | 476 |
|  | 281 | 121 | 416 | 619 |
|  | 424 | 137 | 553 | 761 |
|  | 566 | 138 | 691 | 904 |
|  | 709 | 136 | 827 | 1046 |
|  | 851 | 155 | 982 | 1189 |
|  | 994 | 160 | 1142 | 1331 |
|  | 1136 | 144 | 1286 | 1474 |
|  | 1279 | 145 | 1431 | 1616 |
|  | 1421 | 130 | 1561 | 1759 |
|  | 1564 | 120 | 1681 | 1901 |
|  | 1706 | 104 | 1785 | 2044 |
|  | 1849 | 140 | 1925 | 2186 |
|  | 1991 | 125 | 2050 | 2329 |
|  | 2134 | 106 | 2156 | 2471 |
|  | 2276 | 145 | 2301 | 2614 |
|  | 2419 | 123 | 2424 | 2756 |
|  | 2561 | 138 | 2562 | 2899 |
|  | 2704 | 108 | 2670 | 3041 |
|  | 2846 | … | … | 3184 |
|  | 2989 | … | … | 3326 |
|  | 3131 | … | … | 3469 |
|  | 3274 | … | … | 3611 |
|  | 3416 | … | … | 3754 |

Результаты графического метода контроля по данным табл. 2.2 и расчета в системе Mathcad представлены на рис. 2.5.

Пусть  – случайная величина, распределенная по нормальному закону, с известным математическим ожиданием  и неизвестным средним квадратическим отклонением . Необходимо, используя последовательный анализ, проверить гипотезу  относительно конкурирующей 

 (2.36)

где  – нижняя и верхняя граница приемки контролируемой партии по среднему квадратическому отклонению.

Пусть  соответствуют результатам последовательных наблюдений случайной величины . Процесс испытаний партии продолжается, если

, (2.37)

где приемочное число

,

и браковочное число

.

Как только , партия объявляется нестандартной, и процесс испытаний прекращается.

Если же , партия объявляется стандартной, и процесс испытаний прекращается.

, (2.38)

где , ,  – рассчитанные на  шаге приемочное и браковочное числа.



Партия

принимается

#### Партия

бракуется

Рис. 2.5. Результаты графического метода контроля диаметра

партии деталей последовательным анализом

Если математическое ожидание  неизвестно, процедура (2.37) выглядит следующим образом [5]

Пусть  – случайная величина, характеризующая качество продукта, (например, диаметр, твердость) распределена по нормальному закону с неизвестным  и известным .

Необходимо, используя последовательный анализ проверить гипотезу  относительно конкурирующей .

 (2.39)

где  – желательное значение ,  – наперед заданная малая величина, характеризующая ухудшение качества продукта.

Процесс испытаний партии продолжается, если

. (2.40)

При выполнении условия (2.40) партию продукта можно признать качественной.

Как только

,

или

,

партию продукта можно признать некачественной.

При выборе численных значений вероятности ошибки первого рода  и вероятности ошибки второго рода  следует иметь в виду, что их очень малые значения приводят к значительному увеличению объема испытаний , а следовательно, и к стоимости контроля. Следует отметить, что не существует рациональных планов контроля, удовлетворяющих всем возможным практическим ситуациям.

**2.7. Особенности статистического вывода**

Статистический вывод по своей сути является логически индуктивным методом перехода от частного к общему и, естественно, будет содержать определенные противоречия.

Особенность статистического вывода такова, что при отклонении гипотезы можно оценить заранее вероятность возможной ошибки, когда отбрасывается правильная гипотеза, но если гипотеза принята, это не означает, что она подтверждена с заданной вероятностью. Это означает только, что она согласуется с результатами данного статистического эксперимента, хотя может быть при получении дополнительного экспериментального материала окажется, что ее следует отвергнуть. Иными словами, методика проверки статистических гипотез позволяет отбросить ту или иную гипотезу как неправильную, но не позволяет доказать, что она верна. Статистические критерии указывают лишь на отсутствие опровержения со стороны экспериментальных данных.

Ясно, что на практике всегда можно предположить много разных гипотез, одинаково хорошо согласующихся с результатами наблюдений и никогда нельзя гарантировать, что рассмотрены все возможные гипотезы.

Отсюда, однако, не следует, что об объекте исследования нельзя сказать ничего определенного. Формализованные процедуры проверки статистических гипотез дают лишь четкие правила при решении вопроса об отбрасывании или принятии гипотез в экспериментальных науках, причем результатам статистического анализа никогда не следует приписывать слишком большую объективность, поскольку исследователь всегда вносит в исследование априорную, во многом субъективную информацию, играющую зачастую решающую роль. Следует всегда также помнить, что если исследователь не сумеет выдвинуть плодотворную гипотезу о свойствах изучаемого явления, никакие самые сложные статистические методы не могут привести к интересным выводам [1].

**2.8. Статистики и измерения стационарного случайного процесса**

Если наблюдать непрерывный процесс  в дискретные моменты времени, то получим дискретный процесс вида (рис. 2.6):

, (2.41)

где– дискретный процесс,  – такт (интервал) квантования,  – объем выборки (число наблюдений реализации).

Здесь предполагается, что длительность  замыкания ключа существенно меньше такта квантования , т.е.  (см. рис. 2.6).

В дальнейшем для простоты записи дискретный процесс будем записывать в виде последовательности , что справедливо при .

При дискретизации реализации случайного процесса следует иметь в виду, что выбор слишком малого значения интервала квантования  приведет к избыточности выборки, а следовательно, к увеличению объемов необходимой памяти для хранения данных и времени для вычислений.





Рис. 2.6. Преобразование непрерывной реализации

случайного процесса в дискретную

С другой стороны, при выборе слишком большого значения  возможно наложение (маскировка) частот.

# На рис. 2.7 приведен пример маскировки частот непрерывного периодического сигнала.

# Из рис. 2.7 видно, что при выбранном значении высокие частоты смешаны с низкими частотами.

# Граничная частота

 (2.42)

называется частотой Найквиста, или частотой свертывания (наложения).

# Например [6], если частота Гц, то составляющие с частотой 30 Гц будут неотличимы от составляющих с частотами 170, 230, 370, 430 Гц и т.д.



Рис. 2.7. Пример маскировки частот

Для того чтобы дискретная реализация  содержала все те же частоты, что и исходная непрерывная реализация процесса, необходимо, чтобы выполнилось условие

, (2.43)

где  – угловая частота квантования;  – максимальная угловая частота непрерывного сигнала , для которой амплитудно-частотная характеристика сигнала равна нулю , при , .

Отсюда следует, что

, (2.44)

где  – максимальная (граничная) угловая частота (частота среза) наблюдаемого непрерывного процесса.

Результат (2.44) получен в известной теореме Котельникова-Шеннона.

Отметим, что на практике непрерывные процессы (сигналы) с ограниченными спектрами (граничной частотой ) встречаются редко. Тем не менее, в теории цифрового управления шенноновская частота (частота Найквиста)

, (2.45)

определяет полосу пропускания дискретной системы.

Данные, полученные в результате дискретизации реализации случайного процесса, называют также *дискретным временным рядом* или просто *временным рядом*.

Выборочное среднее стационарного ряда вычисляется по формуле (сравни с (1.62))

. (2.46)

Центрирование временного ряда согласно (1.53) определено выражением

. (2.47)

Выборочная дисперсия

. (2.48)

Формула (2.46) может быть преобразована в рекуррентную [7]

, (2.49)

где  – номер текущего наблюдения;  – среднее значение на  – шаге вычислений;  – текущее значение временного ряда.

Данный алгоритм следует применять в случае постоянства математического ожидания временного ряда. Так как новые наблюдения входят в формулу (2.49) со все меньшим весом.

Для увеличения скорости вычислений среднего значения взамен (2.49) применяют модифицированный рекуррентный алгоритм [7]

, (2.50)

где  – целое положительное число, зависящее от номера текущего наблюдения.

Для  значение .

Последующее значение  определяется из условия

. (2.51)

Если для текущего  выполняется условие (2.51) значение

,

иначе

.

Вычисление по формуле (2.51) дает следующую последовательность , , , , ,  и т.д.

Алгоритм (2.50) обеспечивает 2-кратное увеличение скорости вычислений в сравнении с алгоритмом (2.49), но увеличивает относительно (2.46) среднюю квадратичную погрешность оценки математического ожидания не более 3 % для любого .

К числу экономичных алгоритмов вычисления выборочного среднего относится одномерный итерационный алгоритм [8]

, (2.52)

где  – постоянный коэффициент.

Остальные обозначения аналогичны, что в (2.49).

Погрешность вычислений алгоритма (2.52) будет минимальна в сравнении с (2.46) при

, (2.53)

где  – объем наблюдаемого временного ряда.

Рекуррентный аналог (2.48) имеет вид

, (2.54)

где  – номер наблюдения; ,  – среднее значение и выборочная дисперсия на  – шаге вычислений,  – текущее значение временного ряда.

Модифицированный рекуррентный алгоритм для вычисления выборочного среднего квадратического отклонения нормально распределенной случайной величины имеет вид

. (2.55)

Выбор целых значений  определяется из условия (2.51).

Алгоритм (2.55) имеет высокую скорость вычислений ЦВМ, но точность оценки в сравнении с (2.54) ниже на 10-20 % [7].

Рассмотренные рекуррентные алгоритмы позволяют в каждый текущий дискретный момент времени иметь выборочные среднее и дисперсию контролируемого процесса за предыдущий период наблюдения. И для этого нет необходимости хранить все значения выборки, как в процедурах (2.46) и (2.48). Рекуррентные алгоритмы оценивания очень экономичны, в смысле необходимых объемов памяти вычислительных устройств, и более оперативно позволяют уточнить эти оценки.

Погрешность вычислений оценок математического ожидания и дисперсий стационарного эргодического случайного процесса зависят от номера текущего наблюдения , интервала квантования  и от корреляционной функции измеряемого случайного процесса.

Так, при расчете по формуле (2.46) среднего значения, средняя квадратичная погрешность этой оценки равна [7]

.

Следовательно, для вычисления оценки погрешности расчета математического ожидания необходимо знание корреляционной функции центрированного случайного процесса.

Для алгоритма (2.52), в случае некоррелированных наблюдений, среднеквадратическая погрешность оценки среднего равна [8]

,

где  – математическое ожидание и дисперсия стационарного случайного процесса.

При  имеем

.

Одномерный итерационный алгоритм можно применить и для вычисления выборочной дисперсии стационарного эргодического случайного процесса [8]

, (2.56)

где

,

.

Оценка (2.56) при больших  получается смещенной (заниженной на величину [8]

. (2.57)

Поэтому текущий результат (2.56) следует умножать на коэффициент (2.57).

Статистики случайного процесса широко применяются при контроле точности и статистическом регулировании технологических процессов [9,10].

**2.9. Оценка корреляционной функции**

Расчет оценки корреляционной функции вида (1.64) проводится по формуле

. (2.58)

Для стационарных случайных процессов она дает сведения о среднем значении, дисперсии процесса и о степени статистической связи между наблюдениями, разделенными интервалом  (см. подраздел 1.6).

Оценка автокорреляционной функции центрированного стационарного временного ряда равна

. (2.59)

Здесь *r* – номер шага, *m* – максимальное число шагов.

При выборе *m* желательно, чтобы оно превысило время корреляции  наблюдаемого стационарного случайного процесса. Следовательно,

. (2.60)

На практике для получения полезной оценки автокорреляционной функции число наблюдений , а число .

При  имеем (сравни с (1.66))

. (2.61)

С учетом (2.45) имеем

. (2.62)

Оценка нормированной корреляционной функции (1.83) равна

(2.63)

Если имеются реализации стационарных случайных процессов  и , подвергнутых дискретизации согласно (2.41) и центрированию вида (2.47), то оценки взаимных корреляционных функций равны

, (2.64)

. (2.65)

Соответственно оценка нормированной взаимной корреляционной функции

. (2.66)

Если задано значение относительной средней квадратической погрешности оценки корреляционной функции, то для определения длительности наблюдения  и интервала квантования  можно воспользоваться методикой, предложенной в [7].

**2.10. Оценка спектральной плотности**

Спектральная плотность оценивает частотную структуру случайного процесса, его энергетический спектр (спектр мощности). Для численной оценки спектральной плотности стационарного процесса чаще всего применяются два метода: 1) стандартный метод (метод Блэкмана и Тьюки); 2) метод прямого преобразования Фурье (метод Кули и Тьюки) [6].

Первичная оценка односторонней спектральной плотности стандартным методом (методом Блэкмана и Тьюки) равна

(2.67)

где частота принимает любое значение в диапазоне ,  – такт квантования или интервал между отсчетами (наблюдениями), выбранный в соответствии с (2.42); – оценка корреляционной функции центрированного временного ряда на шаге , вычисленная по формуле (2.59);  – максимальное число шагов, выбранное в соответствии с (2.60).

Функцию  часто называют *периодограммой.*

Рекомендуется рассчитывать значения функции  только для  дискретных частот:

. (2.68)

В результате будет получено  независимых оценок спектральной плотности, поскольку оценки, отстоящие друг от друга менее чем на , будут коррелированны. На этих дискретных частотах согласно (2.67) имеем

(2.69)

где 

Здесь индекс  называется *порядком гармоники*, а  – первичной оценкой спектральной плотности для гармоники порядка .

Для проверки формулы (2.69) по всем  оценкам  следует убедиться в справедливости равенства

. (2.70)

Оценку для теоретической двусторонней спектральной плотности (1.85), определенной как для положительных, так и отрицательных частот, находят из выражения

. (2.71)

Окончательная сглаженная оценка односторонней спектральной плотности определяется путем сглаживания по частоте первичных оценок (2.67) окном Хэннинга, имеющего корреляционную весовую функцию

 (2.72)

Тогда из (2.69) с учетом (2.72) следует

(2.73)

Соответственно сглаженная оценка двусторонней спектральной плотности для дискретных частот  равна

(2.74)

Для оценки взаимной спектральной плотности стационарных центрированных случайных процессов  и  необходимо вычислить функции

(2.75)

(2.76)

представляющие собой соответственно четную и нечетную части взаимной корреляционной функции.

Первичные оценки синфазной и квадратурной составляющих взаимной спектральной функции для одностороннего спектра  и дискретных частот (2.68) имеют вид

(2.77)

(2.78)

Первичные оценки величин  и , соответствующие номеру гармоники *n*, после сглаживания окном Хеннинга (2.72) примут вид:

(2.79)

Сглаженные оценки односторонней взаимной спектральной плотности на  дискретных частотах  имеют вид

, (2.80)

где ,

, (2.81)

. (2.82)

Из (2.80) видно, что односторонняя взаимная спектральная плотность есть комплексная величина.

Отметим, что соотношение между оценками односторонней и двусторонней взаимной спектральной плотностью следующее

(2.83)

Для оценки частотной передаточной функции линейного динамического звена (см. рис. 1.8 и рис. 1.16) в соответствии с (1.104) на дискретных частотах 

(2.84)

где , – сглаженные численные оценки энергетических спектров процессов  и  соответственно для гармоник порядка , рассчитанные по формуле (2.73).

Формула (2.84) дает несмещенную оценку модуля частотной передаточной функции только для идеального случая, когда отсутствуют посторонние шумы на входе и выходе динамического звена.

Если на выходной сигнал  динамического звена наложен посторонний шум, то следует использовать более общий метод получения оценок

(2.85)

(2.86)

где – численная оценка энергетического спектра входного процесса  для гармоники порядка *n*, рассчитанного по формуле вида (2.80) для входного процесса ; , – модуль и фаза сглаженной оценки односторонней взаимной спектральной плотности процессов  и , рассчитанные по формулам (2.81) и (2.82).

Более полно теоретические и практические аспекты анализа случайных процессов, в том числе нестационарных, приведены в [6].

1. **МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ**
   1. **Средства и этапы описания объектов управления**

Объект управления сокращенно ОУ, это часть среды, выделенная таким образом, что на ОУ можно воздействовать и это воздействие позволяет перевести состояние ОУ в заданном направлении.

Объектами управления могут быть технические устройства и агрегаты, технологические установки и процессы, роботы и робототехнические системы, участок, цех и предприятие.

В практике проектирования и управления используются различные средства (модели) для описания ОУ. Под моделью понимают зависимость, которая в удобной форме отражает существенные стороны (процессы) реального объекта управления (проектирования).

Различают модели для целей управления, для целей проектирования, для прогнозирования, для отражения физико-химических процессов, протекающих в объекте, для исследования, для диагностики, для классификации, для обучения и т.д.

Модель не обязательно должна быть описанием фактического устройства объекта. Модель не должна быть слишком сложной. Ее сложность должна находиться в определенном соотношении со сложностью объекта управления (проектирования). Она должна воспроизводить фактическое поведение объекта. Один и тот же объект управления (проектирования) может быть описан моделями разной степени сложности и разного назначения (для управления, для проектирования, для исследования). Модели бывают концептуальные, физические, математические (аналитические) в зависимости от средств их описания.

В современной теории управления наиболее часто используют параметрические модели *в пространстве состояний*. Хотя и классическое представление в частотной области особенно для объектов со скалярным входом и выходом весьма информативно, особенно если учесть возможности систем моделирования, например системы Matlab.

Для построения непараметрических моделей обычно применяют методы, основанные на преобразовании Фурье или корреляционном анализе.

Параметрические модели наиболее приспособлены для задач управления. По ним удобно синтезировать алгоритм управления.

Наибольшее распространение получили следующие средства описания:

* словесное описание;
* чертежи и принципиальные (электрические, монтажные и др.) схемы;
* логические схемы, графы, сети;
* программы на языке программирования;
* кривые, номограммы, таблицы;
* математические модели.

Словесное описание доступно для понимания каждого специалиста, но неоднозначно, и не позволяет провести синтез необходимого управления.

В задачах проектирования, сборки, монтажа широко применяют чертежи и принципиальные схемы, которые обладают хорошими описательными свойствами, однозначны, но малопригодны в задачах синтеза управления.

Для программирования весьма удобны логические блок-схемы, которые обеспечивают однозначную последовательность процедур управления (проектирования), но обладает слабой описательной способностью.

Кривые, номограммы, таблицы обеспечивают наглядное представление зависимостей между переменными ОУ, например, управляющих воздействий от состояния ОУ, выходных переменных от состояния и т.п.

Математические модели наиболее приспособлены для анализа состояния ОУ и синтеза управляющих воздействий для достижения цели, но обладают слабой описательной возможностью.

В зависимости от сложности ОУ применяют комбинацию перечисленных средств описания. Так словесное описание в основном используется для описания *функциональных (технологических) моделей ОУ*, которые описывают функции (технологический процесс) объекта управления с позиции технологов и проектировщиков.

Принципиальные схемы, логические блок-схемы более всего подходят для описания *процедурных моделей*, описывающих порядок действий по управлению технической системой.

Математические модели, кривые, номограммы, таблицы более всего подходят для представления физических процессов, протекающих в ОУ, для описания взаимосвязи переменных и ограничений в задачах проектирования.

В кибернетике объект управления, в котором известны только входы и выходы, принято называть «черный ящик».

Если имеется априорная информация о свойствах модели, например, что она динамическая или линейная, то можно говорить уже о «сером ящике».

Процесс разработки или построения модели объекта управления (проектирования) нельзя формализовать какой либо процедурой, даже очень сложной. Эффективность процесса разработки модели, особенно ее структуры во многом определяется квалификацией, опытом, интуицией исследователя, возможностями используемых программно-технических средств.

В большинстве случаев для разработки модели используют основные физические законы (Ньютона, Максвелла, Кирхгоффа, законы сохранения массы, энергии, перераспределения количества тепла и энтропии). На их основе разрабатывают физико-химические модели (называемые также аналитическими или теоретическими). Эти модели, как правило, представляются в виде сложных систем уравнений (алгебраических, дифференциальных или в частных производных).

Другой подход разработки модели основан на применении экспериментально-статистических методов, когда сведения об объекте получают непосредственно в условиях эксплуатации объекта (пассивный эксперимент), либо путем намеренных воздействий (активно-пассивный эксперимент). При этом структура модели может быть относительно простой.

Отметим, что для моделей проектирования более предпочтительны теоретические модели.

Условно выделяют следующие этапы построения модели экспериментально-статистическими методами:

1. разработка структуры модели на основе априорной информации о физических процессах объекта управления (проектирования) и цели управления (проектирования);
2. планирование эксперимента и сбор экспериментальных данных;
3. оценивание неизвестных параметров (коэффициентов) выбранной структуры модели к имеющимся входным и выходным данным объекта управления (проектирования);
4. проверка адекватности разработанной модели реальному объекту;
5. использование полученной модели в соответствии с выбранной целью.
   1. **Характеристика моделей объектов управления**

Независимо от сложности объекта управления его структурная схема может быть представлена в виде (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Структурная схема ОУ

Здесь  – вектор управляющих воздействий,  – время,  – знак транспонирования;

 – вектор контролируемых неуправляемых воздействий (возмущений);

 – вектор неконтролируемых воздействий (помех и возмущений);

 – вектор состояния ОУ, содержащий всю информацию о прошлом ОУ, необходимую для определения реакции на входные воздействия;

 – вектор наблюдаемых выходных переменных.

Зависимость между выходными и входными переменными в общем виде представляется моделью

. (3.1)

Если  – функция, то модель (3.1) описывает статические объекты. Если  – оператор (интегрирование, дифференцирование, преобразование Лапласа), то объекты динамические.

Возможная классификация моделей ОУ вида (3.1) приведена на рис. 3.2.

Такое многообразие моделей обусловлено, с одной стороны, видом входных воздействий, с другой – видом зависимости .

Кратко характеризуем входные воздействия.

Управляющие воздействия , как правило, представляют кусочно-непрерывную функцию, удовлетворяющую ограничениям

, (3.2)

где  – нижнее и верхнее значение -го управления, допустимое по физической реализуемости или энергетическим возможностям устройства управления.

Множество всех допустимых значений управляющих воздействий можно представить в виде

, (3.3)

где  – допустимое множество управляющих воздействий;  – -мерное евклидово пространство.

Выражение (3.3) читается следующим образом: «Множество  состоит из элементов , принадлежащих -мерному евклидову пространству и удовлетворяющих позиционным ограничениям по всем переменным».

Предполагается, что переменные  можно изменить мгновенно. Если реализация управления исполнительным механизмом описывается дифференциальным уравнением, то эти динамические процессы следует отнести к ОУ и выделить такое , которое по отношению к вновь выделенному объекту является безынерционным. Здесь не рассматриваются следящие системы, где исполнительные механизмы можно считать инерционными.

Поведение вектора возмущений  во многом определяет состояние объекта, методологию исследования ОУ и синтез управления.

Различают:

1. детерминированную возмущающую среду, когда закон изменения составляющих вектора  известен, и можно рассчитать значения возмущений в будущие моменты времени.

Например, **, ;



# Рис. 3.2. Классификация моделей объектов управления

1. полудетерминированную возмущающую среду или возмущения волновой структуры. В этом случае возмущение можно выразить уравнением

, (3.4)

где  – известные функции некоторого базиса функционального пространства;  – кусочно-постоянные весовые коэффициенты, которые неизвестны и могут изменяться случайным кусочно-постоянным образом.

Например, , где . Реализация возмущения  представлена на рис. 3.3.

В момент времени  (см. рис. 3.3) значение коэффициентов  и изменилось случайным образом и оставалось постоянным до момента .

Другие примеры возмущений волновой структуры:





Рис. 3.3. Полудетерминированная кусочно-линейная возмущающая среда

3) стохастическую возмущающую среду, когда изменение вектора  носит случайный характер, т.е.  есть случайный процесс. При этом ОУ находится в стохастической возмущающей среде. На практике широко используют представления вектора  в виде многомерного случайного процесса, как реакцию динамической системы на действие белого шума;

1. целенаправленную возмущающую среду, когда «выбор» возмущения  осуществляется средой (противником) в соответствии с некоторой целью, не всегда совпадающей с целью управления. Система управления находится в конфликтной среде.

Природа вектора ситуации  может быть самой разнообразной. Так он может быть обусловлен действием ошибок измерения векторов , вариацией (изменением) параметров объекта (шум объекта), влиянием неучтенных, неконтролируемых воздействий и т.д.

Выходные переменные  могут отражать состояние объекта управления, т.е. они являются наблюдаемыми переменными состояния, либо отражать эффективность управления, являясь экономическими показателями. В общем случае вектор  можно разбить на блоки, отражающие как наблюдаемые переменные состояния, так и показатели процесса управления.

* 1. **Динамические модели объектов управления**

В соответствии с приведенной классификацией (см. рис. 3.2) рассмотрим динамические модели.

*Нелинейные динамические объекты управления*. В пространстве состояний описание имеет вид

, (3.5)

где ,  – вектор-столбцы нелинейных зависимостей,  – вектор ошибок измерений.

Присутствие в правой части уравнений времени *t* свидетельствует о нестационарности ОУ. Первое уравнение системы (3.5) называют уравнением состояния, а второе – уравнением наблюдения.

Структурная схема нелинейной, нестационарной, стохастической, непрерывной, динамической системы, отвечающей уравнениям (3.5) и начальным условиям по состоянию , приведена на рис. 3.4.

Рис. 3.4. Структурная схема нелинейного динамического ОУ

Нелинейные статические звенья структурной схемы (см. рис. 3.4) представлены двойными линиями, а динамические свойства – интегрирующим звеном, двойными стрелками отмечена многомерность переменных. Это наиболее общий случай и в нем отмечено безынерционное влияние вектора  и  непосредственно на выходные переменные . На практике это встречается крайне редко. Зачастую нелинейные объекты представляют в виде последовательного включения линейных динамических звеньев и нелинейного безынерционного (статического) преобразования.

Так для объектов первого рода

 (3.6)

безынерционное преобразование включено после линейного динамического звена (рис. 3.5).

Здесь

|  |  |
| --- | --- |
|  | – основная матрица коэффициентов (параметров), матрица системы, матрица состояния; |
|  | – расширенная матрица коэффициентов (параметров) связи со входом, входная матрица, матрица управления. |



Рис. 3.5. Структурная схема нелинейного динамического объекта первого рода

Для объектов второго рода безынерционное нелинейное преобразование включено перед динамическим звеном и имеет следующее описание

, (3.7)

где

|  |  |
| --- | --- |
|  | – матрица коэффициентов (параметров) связи с выходом (матрица наблюдения). |

Структурная схема нелинейного, нестационарного, стохастического, непрерывного, динамического объекта второго рода (3.7) представлена на рис. 3.6.

Отметим, что аналитических методов решения уравнений (3.5), (3.6) и (3.7) не существует. Для их анализа прибегают к моделированию на ЭВМ.

*Линейные динамические объекты управления*. Система уравнений, описывающая поведение линейной нестационарной стохастической непрерывной системы имеет вид

, (3.8)

где  – матрицы коэффициентов (параметров), изменяющиеся во времени и обуславливающие нестационарность объекта;  – матрица коэффициентов (параметров), зависящая от времени и от переменных состояния объекта, обуславливает зависимость параметров объекта от его состояния (внутренний шум объекта).



Рис. 3.6. Структурная схема нелинейного динамического объекта второго рода

Системе уравнений (3.8) соответствует структурная схема (рис. 3.7).



Рис. 3.7. Структурная схема линейного нестационарного стохастического динамического объекта управления

Линейный стационарный детерминированный динамический объект описывается системой уравнений

. (3.9)

Решение системы уравнений (3.9) имеет вид

 (3.10)

где  – фундаментальная матрица, или матрица Коши.

Общих аналитических методов вычисления фундаментальной матрицы не существует. Для получения аналитического решения прибегают к разложению фундаментальной матрицы  в ряд, а так же переход к канонической форме уравнений состояния с диагональной матрицей состояния и использования преобразования Лапласа. Чаще для решения систем вида (3.9) применяют методы численного интегрирования, реализуемые на ЭВМ. И конечно, так же, как и для нелинейных систем, универсальным методом анализа линейных динамических систем является метод моделирования на ЭВМ с использованием, например, системы инженерных и научных расчетов Matlab.

*Дискретные объекты управления*. Системы с дискретным временем описывают разностными уравнениями. Так, нелинейная, нестационарная, динамическая система с дискретным временем имеет вид

, (3.11)

где  – дискретное время.

Линейная динамическая система с дискретным временем описывается уравнениями

 (3.12)

и ей соответствует структурная схема (рис. 3.8).

В системе (3.12) обозначения матриц  соответствуют обозначениям непрерывных систем (3.6), однако численные значения элементов этих матриц отличаются от значений элементов непрерывной системы.

*Модели «вход-выход»*. Обобщенно их можно представить структурной схемой (рис. 3.9), где  – входное воздействие и его изображение,  - выходная переменная и ее изображение,  – передаточная и весовая функция динамического объекта управления.



Рис. 3.8. Структурная схема линейного стационарного динамического

объекта с дискретным временем в пространстве состояний

Вот некоторые часто используемые в классической теории управления разновидности этих моделей.



Рис. 3.9. Структурная схема модели «вход-выход»

Передаточная функция объекта управления относительного скалярного входа и выхода

. (3.13)

Ей соответствует частотная передаточная функция



(3.14)

где  – амплитудная частотная функция,

 – фазовая частотная функция.

Если на вход ОУ действует и управление , и возмущение , изображение выходной величины можно представить в виде

. (3.15)

Дискретная передаточная функция

, (3.16)

где параметры (коэффициенты)  численно отличны от значений параметров модели (3.13), даже если описывают свойства одного объекта.

Передаточной функции (3.13) соответствует дифференциальное уравнение вида

 (3.17)

с теми же коэффициентами, что и в выражении (3.13).

Передаточной функции (3.16) соответствует разностное уравнение

 (3.18)

с теми же коэффициентами, что и в выражении (3.16).

Для нулевых начальных условий можно воспользоваться интегралом Дюамеля (интегралом свертки)

,

где  – переходная и весовая функции динамической системы.

Для дискретной системы при  справедливо

,

где  – весовая функция импульсной системы.

Для моделирования дискретной возмущающей среды  можно воспользоваться разностным уравнением (3.18), но на вход дискретного динамического звена подать дискретный белый шум с наперед заданными параметрами.

Тогда случайный сигнал можно представить авторегрессионым процессом со скользящим средним

 (3.19)

Здесь  – последовательность нормально распределенных статически независимых случайных величин (дискретный белый шум) с математическим ожиданием



и ковариационной функцией

,

где  – дисперсия;  – функция Кронекера



Запишем дискретную передаточную функцию фильтра возмущения в соответствии с уравнением (3.19) в виде

 (3.20)

* 1. **Статические модели**

Во многих практических задачах управления и проектирования зависимость между выходными и входными переменными (3.1) статическая.

Следовательно, нас не интересует за счет каких входных воздействий объект управления (проектирования) перешел в состояние , а интересуют только количественные соотношения выходных переменных  от состояния объекта управления (проектирования).

Статическую зависимость будем представлять в виде

, (3.21)

где  – рассчитываемый или наблюдаемый (измеряемый) выходной показатель, скаляр;  – наперед заданная статическая зависимость (функция) входных переменных;  – вектор входных переменных размерности ;  – аддитивная помеха, как результат воздействия всех неучтенных возмущений в модели (3.1).

Вектор входных переменных  отражает и входные воздействия  и состояния . Так исходную модель

,

легко привести к виду

,

где  – фиктивная переменная, .

Изложенный переход иллюстрирует рис. 3.10.

Рассмотрим некоторые часто применяемые модели.

Модель или полином первого порядка

. (3.22)

Рис. 3.10. Структурная схема статической модели ОУ: а) исходная; б) приведенная

Эта модель линейна относительно переменных , линейна относительно параметров (коэффициентов)  и в -мерном пространстве представляет гиперплоскость (рис. 3.11).



Рис. 3.11. Линейная модель и ее линии равного уровня

Модель второго порядка или полный квадратичный полином

, (3.23)

|  |  |
| --- | --- |
| где | – квадратичная матрица коэффициентов размерности . |

Так для  и  матрица *А* имеет вид



Соответственно модели

, (3.24)

 (3.25)

Здесь  – взаимодействие переменных,  – квадратичные члены полинома (модели),  – линейные члены модели,  – свободный коэффициент модели.

Модель (3.23) нелинейна относительно переменных , но линейна относительно параметров .

Если матрица  положительно определена, кроме начала координат , т.е. все диагональные определители матрицы  строго положительны



,

то квадратичная форма имеет минимум.

Если матрица  отрицательно определена повсюду, кроме начала координат, т.е. выполняются следующие условия

,

то квадратичная форма имеет максимум.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы в пространстве переменных  имеют поверхности равного уровня  в виде концентрических эллипсоидов с центром в начале координат. Линейные члены  модели (3.23) не изменяют формы поверхностей равного уровня, а лишь смещают их в пространстве переменных, не меняя при этом ориентации главных осей эллипсоидов.

Пример квадратичной модели приведен на рис. 3.12.





Рис. 3.12. Квадратичная модель и ее линии равного уровня

Некоторые часто используемые в задачах оптимизации квадратичные модели.

Центральная модель с постоянным градиентом (рис. 3.13, *а*)

 (3.26)

и центральная модель с переменным градиентом (рис. 3.13, *б*)

, (3.27)

где  – координаты экстремума по -ой переменной,  – экстремальное значение функции.

Эллиптическая модель

. (3.28)

Сепарабельная модель

, (3.29)

где  – некоторые наперед заданные функции.

Нестационарность статической модели отражается изменением коэффициентов модели, например

. (3.30)

В задачах оптимизации рассматривают частные случаи нестационарности модели, а именно: вертикальный и горизонтальный дрейф экстремальной точки (цели) либо их сочетание. Так, уравнение

 (3.31)

задает вертикальный дрейф экстремального значения функции  со скоростью  и горизонтальный дрейф координат экстремума со скоростью  (рис. 3.14).



*а) б)*

Рис. 3.13. Центральные модели второго порядка: а) с постоянным градиентом

(конус); б) с переменным градиентом (параболоид вращения)



Рис. 3.14. Пример дрейфа

Модель вида

 (3.32)

задает восхождение параболоида вращения по цилиндру (рис. 3.15).

Модели нелинейные относительно и переменных , и параметров , имеют вид

, (3.33)

. (3.34)



Рис. 3.15. Пример нестационарной модели второго порядка (3.32)

Для испытания эффективности алгоритмов оптимизации применяют тестовые функции, имеющие сложные поверхности с характерными острыми и затяжными «оврагами» и «гребнями». Среди них выделяют.

Овраг Розенброка

, (3.35)

с координатами минимума .

Функция Пауэлла

, (3.36)

с координатами минимума .

Двумерная экспоненциальная функция

, (3.37)

где  – шаг изменения параметра.

Координаты экстремума .

*Временные ряды*. Для целей прогнозирования наблюдаемых процессов и явлений во времени (прогноз температуры, давления, скорости движения, уровня шума, выпуска продукции, спроса и т.п.) применяют модели:

полином нулевого порядка

, (3.38)

полином первого порядка

, (3.39)

полином второго порядка

, (3.40)

полином -ой степени как обобщение полиномиальных моделей

, (3.41)

гармоническую модель для описания периодических процессов

. (3.42)

В экономических задачах часто используют экспоненциальную (показательную) модель

, (3.43)

и логистическую кривую

, (3.44)

где  – параметры (коэффициенты) модели.

Если измерения ведутся в дискретные моменты времени, то подстановкой соотношения (2.41) в рассмотренные модели временных рядов переходим к дискретным моделям временных рядов, например, вида

. (3.45)

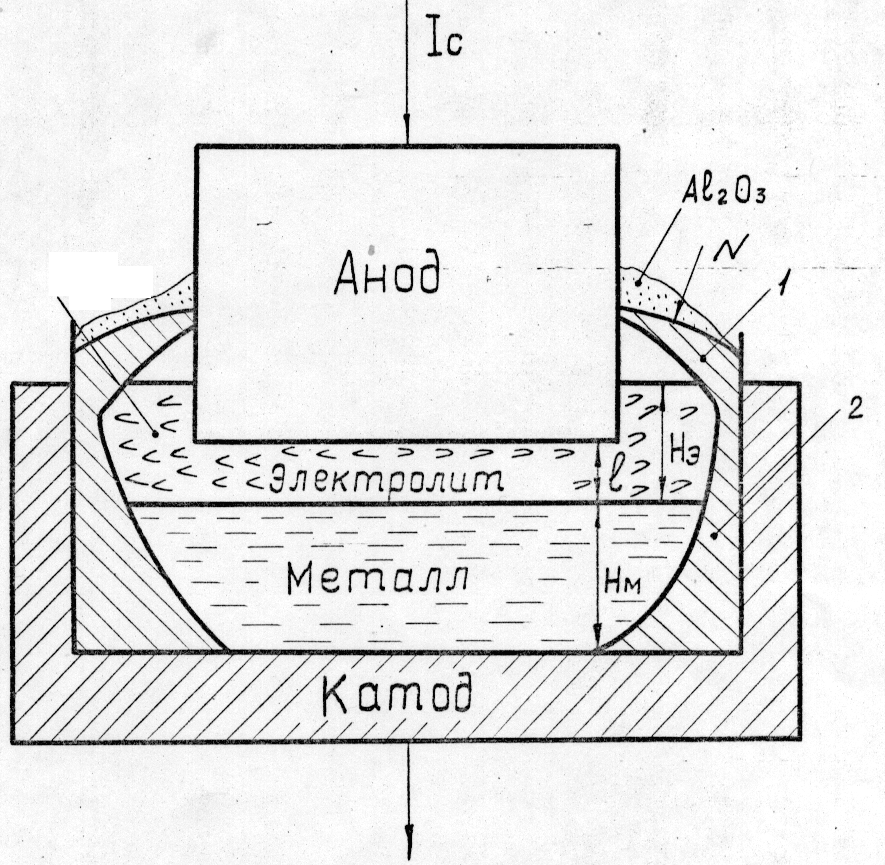
* 1. **Пример описания объекта управления**

**3.5.1. Краткое описание процесса электролиза алюминия**

Технологический процесс получения алюминия осуществляется путем разложения криолито-глиноземного расплава постоянным током. Конструктивно электролизер выполнен в виде ванны (катод) и удерживаемого над ней с помощью специальных устройств анода. Упрощенная схема электролизера в разрезе приведена на рис. 3.16.

Процесс электролиза протекает непрерывно с момента пуска ванны до ее полного выхода из строя. На катоде выделяется жидкий алюминий, а на аноде – продукты реакции  и .

Для поддержания технологического процесса используется значительное число управляющих воздействий, различающихся по степени влияния, стоимости, частоте применения и т. д. Дадим краткую характеристику основным факторам, определяющим производительность и состояние электролизера.



*tэ, К0*

Рис. 3.16. Схема электролизера: 1 – криолито-глиноземная корка;

2 – боковые гарнисажи и подовые настыли

В процессе обслуживания 2÷3 раза в смену (6 ч) производится обработка  ванны специализированными машинами. В период обработки осуществляется погружение криолино-глиноземной корки в электролит и подсыпка новой порции глинозема . Особенность данной операции заключается в том, что чрезмерное увеличение количества глинозема в ванне ведет к образованию осадков на подине, к увеличению сопротивления и, как следствие, нарушению нормального хода работы электролизера. С другой стороны, малое содержание  в электролите вызывает увеличение числа анодных эффектов, что ведет не только к снижению производительности, но и перерасходу электрической энергии. На практике для улучшения режима работы электролизера применяют частые обработки с малой загрузкой. Это способствует равномерной подаче глинозема в расплав электролита, и постоянству концентрации глинозема. Растворимость глинозема при криолитовом отношении  (кислая среда) и температуре  составляет 10 %. Глинозем понижает температуру начала затвердевания и плотность электролита, уменьшает летучесть, но в то же время снижает электропроводность.

Существенное влияние на состояние электролизера оказывает состав электролита, характеристикой которого является криолитовое отношение . Состав электролита за счет расхода компонент в процессе обслуживания непрерывно изменяется. Для поддержания  вводятся корректирующие вещества: фтористый алюминий , фтористый кальций и магний , а также добавки  и т. п. Оперативная коррекция  осуществляется фтористым алюминием. Остальные добавки вводятся раз в 2-3 месяца Их содержание в электролите не должно превышать в сумме 10 % от общего веса электролита. Криолитовое отношение определяется методом кристаллооптического анализа проб, отбираемых из каждой ванны 7÷8 раз в месяц. Результат анализа поступает из лаборатории в корпус на 3-ий день после взятия пробы.

Тепловое состояние электролизера зависит от уровня электролита , уровня металла , размеров боковых гарнисажей и подовых настылей. Последние определяют форму рабочего пространства (*ФРП*)*.* Уровень электролита влияет на равномерность притока глинозема под анод и отвод тепла из рабочей зоны. Увеличение объема электролита достигается введением свежего, флотационного или оборотного криолита.

Уровень металла  определяется массой жидкого алюминия, постоянно находящегося в электролизере.

Процессы, происходящие в межполюсном зазоре  (расстояние от поверхности анода до зеркала металла), являются основными в работе электролизера. От величины  зависит количество выделенного тепла, расход электроэнергии, производительность, скорость прямых и обратных электрохимических процессов и т. д. Значимость данного фактора отражает тот факт, что существующие в настоящее время системы автоматизации процесса электролиза основаны на автоматическом регулировании межполюсного расстояния. Основные зависимости выходных показателей процесса также получены в функции  или параметров, его характеризующих. Необходимость в изменении  возникает от 1 до 20 раз в час.

Сила тока серии  влияет на производительность электролизера, количество выделенного тепла, скорость циркуляции электролита и металла, картину магнитного и электрического полей электролизера. Поскольку все электролизеры в корпусе соединены последовательно, то осуществить индивидуальное регулирование тока электролизера без подпиточных агрегатов невозможно.

Температура электролита  является обобщенным показателем теплового режима электролизера. Кроме факторов, перечисленных выше, на  влияют скорость и температура воздушных потоков, охлаждающих электролизер, состояние анода, ФРП и другие неконтролируемые внешние и внутренние возмущения.

Изменение свойств футеровки в процессе старения ванны отражает сопротивление подины .

К основным технико-экономическим показателям относятся:

выход по току, определяемый по формуле

,

производительность электролизера

### , кг/ч

и себестоимость 1 т алюминия сырца.

Здесь  – вес алюминия, выделенного на катоде за время , ч;  – электрохимический эквивалент, г/а ч;  – ток серии, А.

Кроме перечисленных показателей в практической деятельности рассчитывают выход по энергии и удельный расход электроэнергии.

**3.5.2. Математическая модель процесса электролиза алюминия**

Из приведенного краткого описания процесса электролиза алюминия и анализа работ, посвященных исследованию процесса, следует вывод о многомерности электролизера как объекта управления, нелинейной зависимости выходных показателей от входных воздействий и переменных состояния, о динамическом характере протекающих в электролизере процессах.

Для целей управления необходима модель, позволяющая с достаточной точностью предсказывать выход объекта при изменении входных переменных и обеспечивающая относительно простые алгоритмы синтеза управлений. Структурную схему электролизёра, как нелинейного динамического объекта управления можно представить в виде объекта первого рода (рис. 3.17).



Рис. 3.17. Структурная схема электролизера,

ДЗ – многомерное динамическое звено; СМ – статическая модель электролизёра

Выделенные на период исследований контролируемые воздействия и переменные состояния сведены в табл. 3.1-3.4.

###### Таблица 3.1

**Управляемые переменные (воздействия) **

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | Наименование | Области изменения | | | Единицы измерения | Период регулирования | Примечание |
|  |  |  |
|  | Межполюсное расстояние | 3.5 | 4.2 | 6.5 | cм | 1÷20 раз/час | Автоматически, контроль через |
|  | Число потоков в сутки | 7 | 11 | 15 | пот./сут | раз/сутки | Задает мастер |
|  | Масса внесённого фтористого алюминия | 10 | 50 | 100 | кг | раз/сутки | Электролизник |
|  | Масса внесенных разновидностей криолита (свежего, флотационного, оборотного) | 20 | 60 | 200 | кг | раз/сутки | Электролизник |

Продолжение таблицы 3.1

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | Наименование | Области изменения | | | Единицы измерения | Период регулирования | Примечание |
|  |  |  |
|  | Масса внесённого или изъятого из электролизёра электролита | 0.1 | 1.2 | 1.5 | т | По необходимости | Электролизник |
|  | Масса внесённого фтористого магния | 35 | 40 | 60 | кг | Раз в два месяца | Электролизник |
|  | Масса изъятого, добавленного алюминия | 500 | 2000 | 4000 | кг | Раз в двое2 суток | Задает мастер |

###### Таблица 3.2

**Контролируемые воздействия **

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | Наименование | Области изменения | | | Единицы измерения | Период контроля | Примечание |
|  |  |  |
|  | Ток серии, средний | 155 | 157 | 161 | кA | Ежемесячно, автоматически | На преобразовательной станции |
|  | Температура воздуха, среднесуточная | -30 | 10 | +30 |  | Ежедневно | Данные метеостанции |
|  | Скорость ветра, среднесуточная | 0 | 7 | 20 | м/с | Ежедневно | Данные метеостанции |
|  | Среднесуточное время открытого состояния электролизера | 0 | 20 | 300 | мин | Ежедневно | Мастер |

###### Таблица 3.3

**Контролируемые переменные состояния **

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | Наименование | Области изменения | | | Единицы измерения | Период контроля | Примечание |
|  |  |  |
|  | Приращение температуры электролита | 0 | 20 | 40 |  | Раз в двое суток | Переносной термопарой |
|  | Криолитовое отношение | 2,50 | 2,7 | 3,15 | отн. ед | Раз в двое суток | Отбор проб |
|  | Уровень металла | 26 | 35 | 42 | см | Раз в двое суток | Мастер |

Продолжение таблицы 3.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | Наименование | Области изменения | | | Единицы измерения | Период контроля | Примечание |
|  |  |  |
|  | Уровень электролита | 10 | 15 | 20 | см | Раз в двое суток | Мастер |
|  | Содержание  в электролите | 2 | 2.5 | 3 | % | Раз в месяц | Отбор проб |
|  | Содержание  в электролите | 1.5 | 2 | 2.5 | % | Раз в месяц | Отбор проб |
|  | Относительное сопротивление подины | 1 | 1.3 | 1,5 | отн. ед. |  | Задается в зависимости от срока службы |
|  | Напряжение на электролизёре | 3 | 4.3 | 30 | В | Ежечасно, автоматически | Самописец  Н-340 |
|  | Число анодных эффектов за сутки | 0 | 3 | 10 | шт. | Ежесуточно | Самописец  Н-340 |
|  | Продолжительность анодных эффектов, суточная | 0 | 5 | 30 | мин | Ежесуточно | Самописец  Н-340 |

Таблица 3.4

**Выходные показатели процесса **

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение | Наименование | Области изменения | | | Единицы измерения | Период контроля | Примечание |
|  |  |  |
|  | Выход алюминия по току | 0 | 80 | 95 | % | Раз в месяц | По вылитому металлу |
|  | Составляющая себестоимости алюминия | 250 | 400 | 600 | руб/т | Ежемесячно | По текущим издержкам |
|  | Производительность | 0 | 45 | 50 | кг/час | Ежемесячно | По вылитому металлу |

К числу редко контролируемых или неконтролируемых воздействий  можно отнести состояние анода, ФРП, интенсивность горения продуктов реакции в горелке, состояние подины (наличие осадка и коржей), влияние магнитных полей и т.п.

Для разработки модели были использованы экспериментально-статистические методы, а именно: поисковая оптимизация в течение 1 года на двух электролизерах типа С8Б и активно-пассивные эксперименты по выявлению динамических и статических зависимостей переменных состояния от входных воздействий. Для контроля переменных и воздействий были использованы имеющиеся на заводе методики и средства измерений, а также дополнительные ресурсы и приборы для контроля .

В ходе эксперимента было установлено, что влияние окружающей среды , в силу саморегулирующих свойств электролизера (изменение ФРП за счет роста (убыли) боковых гарнисажей и подовых настылей) незначительно. Это подтвердилось и при обработке результатов наблюдений.

При выборе вида статической модели (см. рис. 3.17) были использованы имеющиеся в литературе разработки по идентификации электролиза алюминия, выявленные в ходе экспериментов взаимосвязи переменных процесса, а также опыт специалистов электролизного производства. В итоге для описания была принята модель вида (3.23), в которой некоторые взаимосвязи и члены были исключены до стадии обработки результатов наблюдений.

По данным 300 экспериментов при значительном изменении входных воздействий были получены следующие статистические модели [11]

, (3.46)

, (3.47)

где  – выход потоку, %;  – составляющая себестоимости алюминия, учитывающая затраты на электроэнергию и фторсоли, руб/т;  – приращение температуры ;  – относительное сопротивление подины,  ( – базовая величина).

Фрагменты поверхности (3.46) приведены на рис. 3.18 и рис. 3.19. При построении изменялись только 2 переменные, остальные были постоянными. Более информативны рис. 3.20, рис. 3.21. По ним можно судить о характере взаимного влияния переменных. Так, с ростом температуры электролита (см. рис. 3.20) для поддержания максимума выхода по току следует уменьшать  или . Видно также, что  и  влиятельные факторы (переменные).

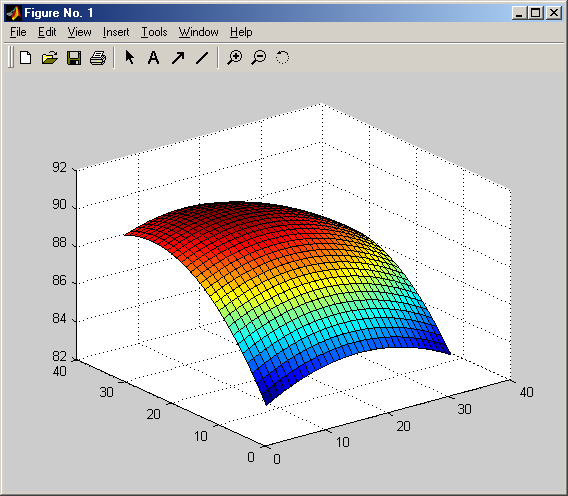


Рис. 3.18. Зависимость выхода алюминия по току от тока серии

и межполюсного расстояния

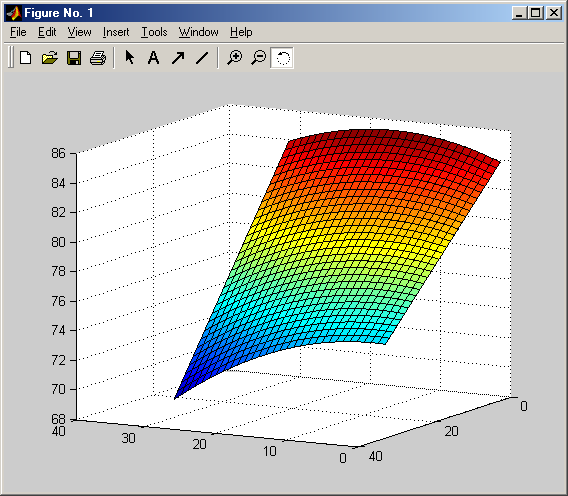
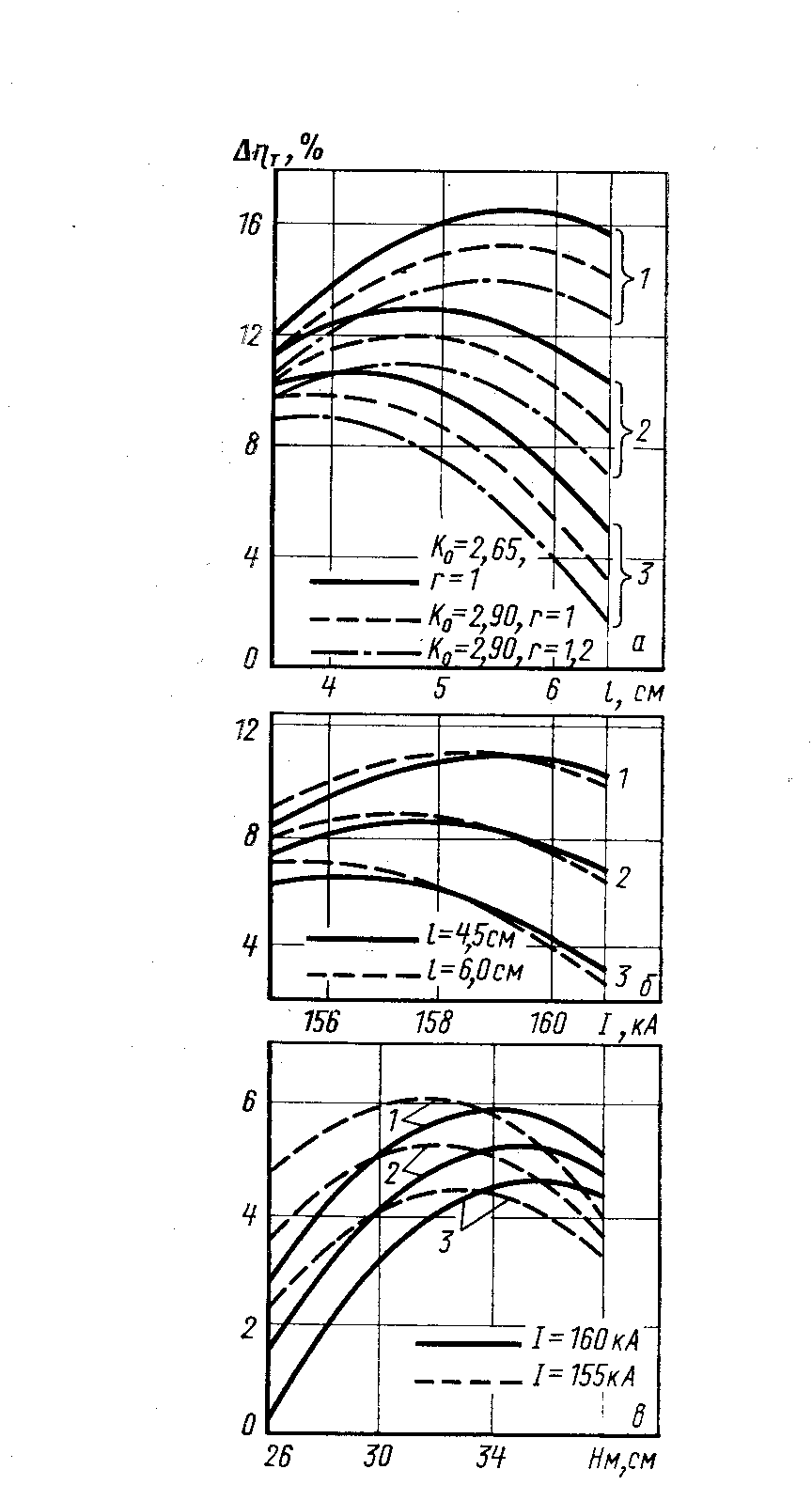
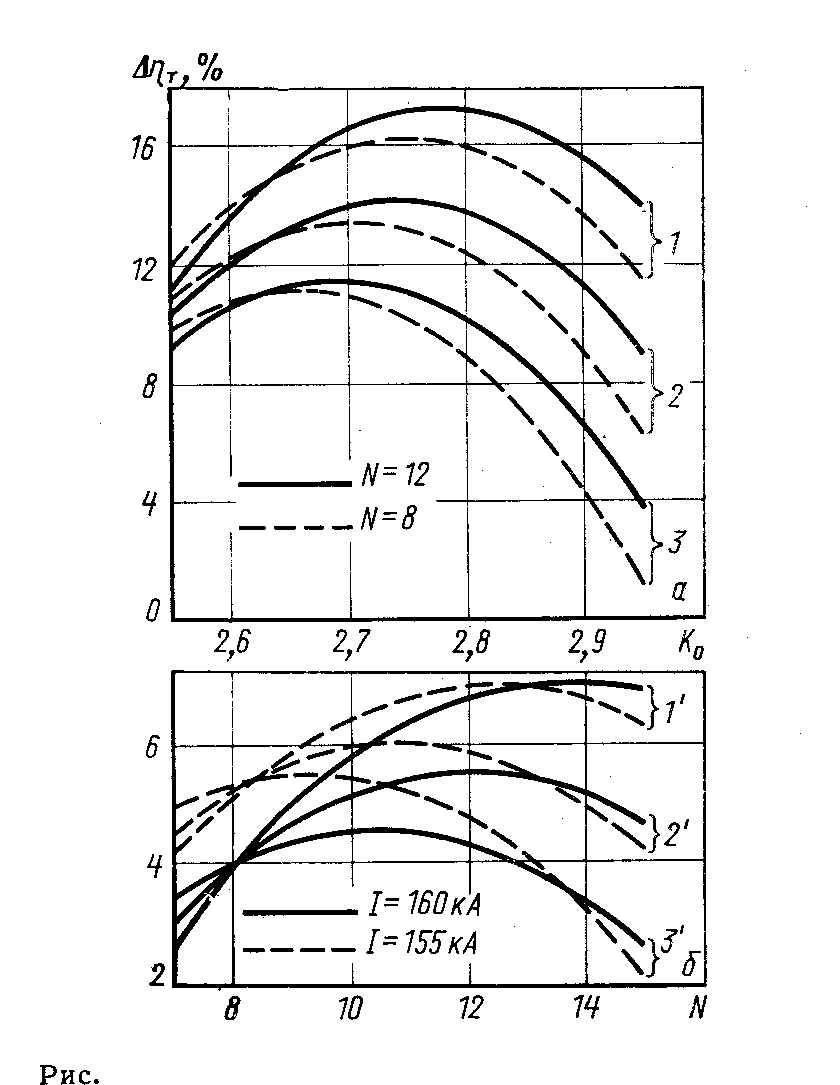


Рис. 3.19. Зависимость выхода алюминия по току от тока серии и

приращения температуры электролита



а)



б)

Рис. 3.20. а) зависимость выхода по току от межполюсного расстояния  (а), тока серии  (б) и уровня металла после выливки  (в). Приращение температуры электролита , ; 1 – 0; 2 – 20; 3 – 40;

# б) зависимость выхода по току от криолитового отношения (а) и числа потоков в сутки (б). Приращение температуры электролита , ; 1 – 0; 2 – 20; 3 – 40. Уровень электролита , см: 1’ – 20; 2’ – 15; 3' – 10

Некоторые сечения зависимости (3.47) приведены на рис. 3.21, рис. 3.22. Они также позволяют оценить степень влияния переменных и их взаимодействий.

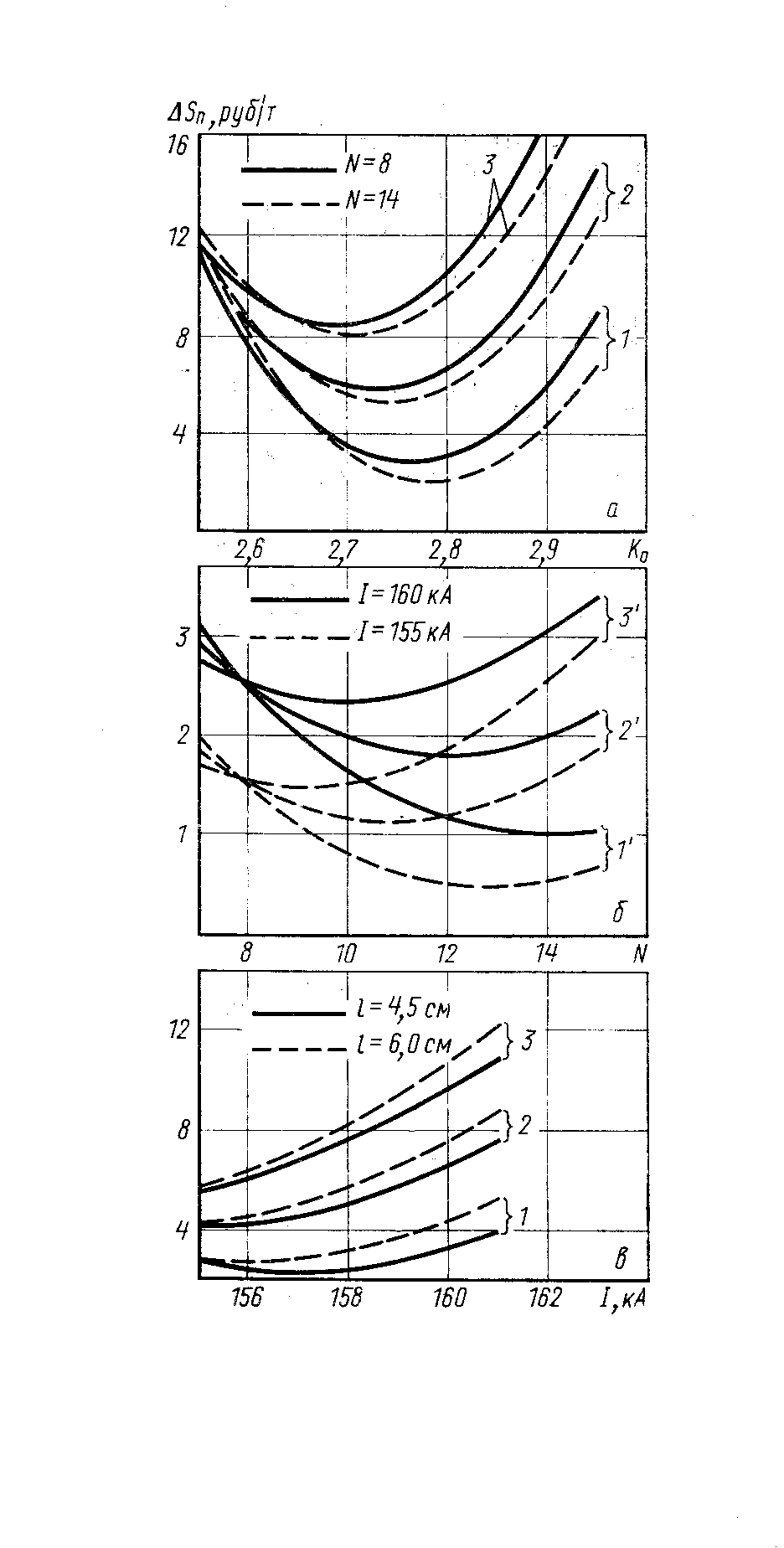


Рис. 3.21. Зависимость составляющей себестоимости алюминия от криолитового отношения  (а), число потоков в сутки  (б) и тока серии  (в). Приращение температуры электролита , : 1 – 0; 2 – 20; 3 – 40. Уровень электролита , см: 1’ – 20; 2’ – 15; 3’ – 10

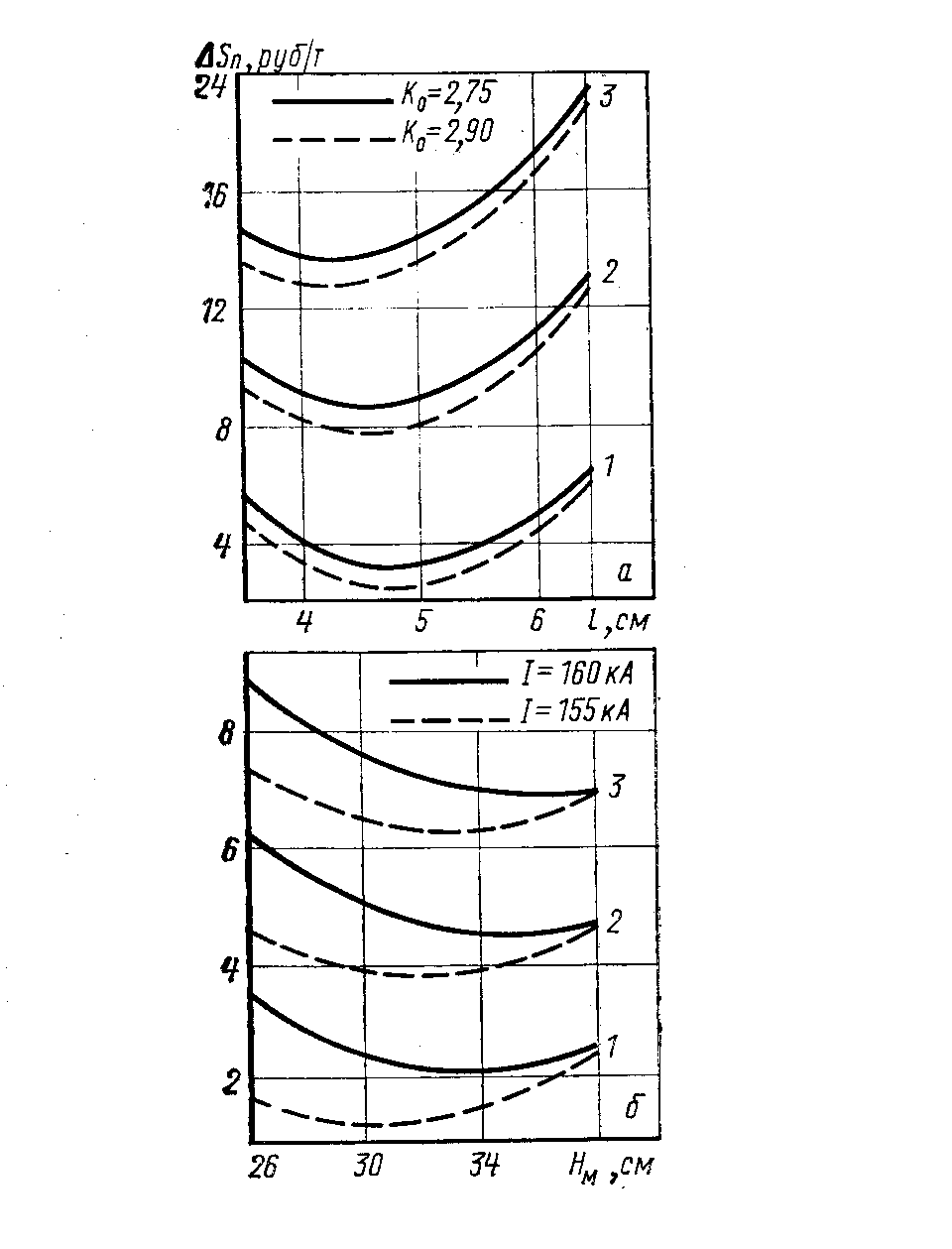


Рис. 3.22. Зависимость составляющей себестоимости алюминия от межполюсного расстояния  (а) и уровня металла после выливки  (б). Приращение температуры электролита , : 1 – 0; 2 – 20; 3 – 40

Квадратичные члены моделей (3.46) и (3.47) указывают на экстремальный характер зависимости от соответствующих переменных. Следовательно, существуют оптимальные (экстремальные) режимы ведения технологического процесса. Причем эти режимы для модели (3.46) и (3.47) не совпадают.

Модели многомерного динамического звена (ДЗ см. рис. 3.17) также получены экспериментально-статистическими методами [12].

*Содержание фтористого магния в электролите.*

Процесс растворения фтористого магния в электролите описывается передаточной функцией

, (3.48)

где  – коэффициент растворимости фтористого магния в электролите, процент/кг;  – постоянная времени растворения внесенного фтористого магния в электролите, ч.

Процесс расхода растворенного в электролите фтористого магния при работе электролизера описывается передаточной функцией

, (3.49)

где  – постоянная времени снижения содержания фтористого магния в электролите в ходе технологического процесса, ч.

*Модель изменения криолитового отношения.* Растворение фтористого алюминия в электролите описывается передаточной функцией

, (3.50)

где  – коэффициент снижения криолитового отношения при внесении фтористого алюминия, относительная единица, кг;

 – постоянная времени растворения фтористого алюминия в электролите, ч.

Процесс повышения криолитового отношения вследствие расхода составляющих электролита  и  описывается передаточной функцией

, (3.51)

где

 (3.52)

– постоянная времени повышения криолитового отношения, ч; – постоянные коэффициенты, полученные по экспериментальным данным;  - среднесуточное время открытого состояния электролизера, ч;  – продолжительность анодных эффектов за предшествующий период, мин;  – среднее значение температуры электролита за предшествующие 24 ч, град.

С увеличением перегрева продолжительность анодных эффектов и открытого состояния увеличивается и скорость повышения криолитового отношения.

Поправка на содержание фтористого магния в электролите учитывается коэффициентом , а от внесения разновидностей криолита составляющей

, (3.53)

где  – вес внесенной разновидности криолита свежего, оборотного, флотационного, кг;  – криолитовое отношение внесенной разновидности криолита, относительные единицы;  – текущее криолитовое отношение электролита, относительные единицы;  – текущая масса электролита, кг.

*Модель уровня электролита*

, (3.54)

где  – коэффициенты модели ;  – приращение межполюсного расстояния и массы электролита в момент времени .

Для расчета выхода по току прогнозируемое значение  фильтруется апериодическим фильтром, постоянная времени которого выбирается исходя из частоты расчетов .

*Модель уровня металла*

, (3.55)

где  – текущее время, ч;  – время последней выливки металла из электролизера, ч;  – суммарная масса металла, вылитого из электролизёра за период , кг;  – текущая производительность электролизера, кг/ч;  – уровень металла после выливки в момент , см.

*Модель температуры электролита*. Передаточные функции от изменения межполюсного расстояния, анодного эффекта, изменения числа потоков обработки электролизера имеют вид

, (3.56)

, (3.57)

, (3.58)

где , ,  – коэффициенты;  ч,  ч,  ч – постоянные времени.

Основную тенденцию изменения температуры отражает составляющая

, (3.59)

где  – коэффициенты ,  – время предыдущей коррекции коэффициентов модели, ч.

По результатам исследований [12] получена модель регрессионного анализа

 (3.60)

где  – рабочее напряжение на электролизере, В.

Соответственно

 (3.61)

 – межполюсное расстояние, см.

Обозначения остальных переменных и их размерности приведены в табл. 3.1-3.3.

Результаты эксперимента позволили также получить следующие регрессионные зависимости.

Электролизер А. Объем выборки  режимов. Средние:  анодных эффектов в сутки;  отн. ед.;  см;  см;  см;  потоков в сутки;  . Для 5 % уровня значимости () уравнение регрессии имеет вид:

. (3.62)

Электролизер Б. Объем выборки  режима. Средние:  анодных эффектов в сутки;  отн. ед.;  см;  см;  см;  потоков в сутки;  .

Для  уравнение регрессии имеет вид:

. (3.63)

В результате совместной обработки данных (;  режима) получено уравнение регрессии:

. (3.64)

Результаты исследования показывают, что наибольшее влияние на число анодных эффектов оказывают переменные: , хотя первоначально в модель были включены также .

Пониженную частоту анодных эффектов в электролизере Б ( против ) можно объяснить более высоким межполюсным расстоянием ( см,  см) и соответственно повышенной температурой электролита (  против  ).

Приведенные уравнения регрессии хорошо интерпретируются с точки зрения технологии производства и потому введены в общее математическое описание электролизера.

Итоговая структурная схема модели электролизера с учетом перекрестных связей переменных состояния и входных воздействий приведена на рис. 3.23.



Рис. 3.23. Структурная схема модели электролизера

**4. МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ**

В данном разделе рассмотрим методы идентификации неизвестных параметров (коэффициентов) модели при условии, что структура модели априори известна. Наблюдение входных и выходных переменных объекта осуществляется в процессе его нормального функционирования.

Такой метод получения результатов наблюдений называют пассивным экспериментом.

При планировании пассивного эксперимента исследователь должен определить (запланировать):

1. длительность эксперимента;
2. интервал съема данных с объекта (интервал квантования);
3. метод обработки поступающих результатов эксперимента (в темпе с их поступлением или после окончания эксперимента);
4. критерий эффективности полученной модели;
5. учет возможных динамических процессов в объекте при разработке статической модели.

При выборе длительности эксперимента желательно, чтобы входные сигналы (воздействия) даже в режиме нормальной эксплуатации «пробежали» все свои возможные значения (уровни), а выходной сигнал содержал бы максимум информации о состоянии объекта.

**4.1. Дисперсионный анализ**

Во многих областях практической деятельности встречаются объекты исследования, состояние которых определяется входными переменными или факторами, не имеющими *количественного* описания. Это могут быть неуправляемые и управляемые переменные, которые в силу обстоятельств не измеряются. Для изучения влияния факторов подобного рода на выходной показатель объекта, их общей оценки, ранжирования и выделения среди них существенных используется *дисперсионный анализ*.

Примеры подобных объектов [14]:

1) физический процесс  (рис. 4.1.) контролируется (измеряется) несколькими приборами (или разными методами), причем каждый оператор производит некоторое число дублирующих измерений. Требуется определить, насколько существенно влияние на результат измерения двух факторов : прибора (метода) и оператора;

1. детали обрабатываются параллельно на нескольких станках автоматической линии. Требуется установить, однотипны ли средние размеры деталей, изготовляемых на разных станках, т. е. оценить значимо ли воздействует фактор индивидуальности станка на процесс обработки;
2. при использовании комплектующих из нескольких партий надо определить существенно ли отличаются параметры комплектующих из разных партий;



Рис. 4.1. Объект дисперсионного анализа

1. при нестабильности (дрейфе) величины выходного показателя во времени необходимо оценить влияние дрейфа на фоне случайных погрешностей наблюдений.

Итак, общая *постановка задачи*:

-выходной показатель  может зависеть (по физическим соображениям) от -независимых факторов , не имеющих количественного описания, и их взаимодействия;

- каждый фактор  варьируется (природой) на  уровнях;

- каждая -я серия содержит  дублирующих (наблюдений) опытов.

Требуется: определить, в какой мере существенно на фоне случайных погрешностей влияние того или иного фактора  или комбинации (взаимодействия) таких факторов на выходную переменную , провести сравнение с другими факторами и выделить наиболее существенные.

Допущения, на которых базируется дисперсионный анализ:

1) величина  – нормально распределенная случайная величина с

 (4.1)

т.е.  – стационарный гауссовский случайный процесс.

1. дисперсия единичного наблюдения , обусловленная случайными ошибками, постоянна во всех опытах и не зависит от .

Каждое из этих допущений необходимо проверить по результатам наблюдений анализируемого эксперимента.

*Идея* дисперсионного анализа.

Чтобы оценить влияние каждого фактора на выходную переменную и сравнить влияние различных факторов, установим некоторый показатель этого влияния. Пусть отсутствуют ошибки измерения (опыта) . При варьировании фактора на разных уровнях получены «истинные» значения выходной переменной .



Тогда в качестве показателя влияния фактора примем величину



, (4.2)



где .



Очевидно, чем больше влияние фактора , тем больше дисперсия . Если присутствуют помехи и известна , то, видимо, меру влияния фактора можно характеризовать выборочной дисперсией



(4.3)



с числом степеней свободы .



Очевидно, если отличие от незначительно, то, следовательно, разброс наблюдений связан только со случайными причинами, т. е. ошибками измерений (опыта) , и влияние фактора незначимо. Если же отличие от значимо, то, следовательно, повышенный разброс наблюдений вызывается не только случайной ошибкой , но и еще влиянием фактора , которое нужно признать значимым.



Поскольку выборочная дисперсия

, (4.4)



так как мы, рассчитывая по (4.3.), не разделяли влияние и .



Из (4.4) следует

. (4.5)



В общем случае, когда дисперсия заранее неизвестна, необходимо найти ее оценку по данным эксперимента. С этой целью планируются повторные (дублирующие) эксперименты.



Таким образом, основная идея дисперсионного анализа заключается в разложении общей дисперсии на составляющие, зависящие от случайных причин, от каждого из рассматриваемых факторов и их взаимодействий в отдельности, а также в оценке статистической значимости дисперсий последних с учетом ошибки воспроизводимости опыта .



Технику проведения дисперсионного анализа проиллюстрируем на однофакторном анализе.

*Однофакторный анализ.* Действует один фактор .



Результат наблюдения сведем в табл. 4.1.

### Таблица 4.1

### **Результаты наблюдений дисперсионного анализа**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *j*-й  уровень | 1 | 2 | 3 | *l* |
| *i*-й дубл.  опыт |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| *m* |  |  |  |  |
| Групповая  средняя |  |  |  |  |

При таком расположении наблюдений рассеивание между строками будет определяться ошибкой воспроизводимости , а рассеивание между столбцами – действием фактора .



Вычислим общее среднее

. (4.6)



Рассеивание отдельных наблюдений относительно общего среднего обусловлено действием случайных величин и влиянием фактора .



Разложим сумму

. (4.7)



Сумма характеризует рассеивание наблюдений, обусловленное ошибкой и фактором .



Сумма характеризует рассеивание, обусловленное ошибкой , а – действие фактора .



Предположим, что влияние фактора на отсутствует, т.е. нуль гипотеза верна. Тогда все серии параллельных наблюдений можно рассматривать как случайные выборки из одной и той же нормальной совокупности, и следовательно:



1. выборочная дисперсия рассеивания «внутри серий» или остаточная оценка дисперсии воспроизводимости (остаточная дисперсия)



, (4.8)



с числом степеней свободы ;



1. выборочная дисперсия рассеивания между средними (факторная дисперсия)

, (4.9)



с числом степеней свободы .



Очевидно, если фактор не влияет, то выборочные оценки , однородны, так как являются оценками одной и той же генеральной дисперсии.



Чтобы оценить влияние фактора проверим нуль-гипотезу об однородности выборочных оценок (см. пример 2.4)



. (4.10)



Если для , то влияние фактора значимо .



Если же , то влияние фактора незначимо. Следует иметь в виду, что дисперсионный анализ наблюдений эксперимента позволяет определить влияние фактора лишь в целом, не давая количественных оценок этого влияния. При этом выводы справедливы для данного статистического материала. Отметим, что возможна обработка статистического материала с неравным числом наблюдений в каждой серии наблюдений [14].



Кроме рассмотренного однофакторного анализа с повторными наблюдениями проводится двухфакторный анализ с одно - и многократным наблюдением, когда изучается влияние двух одновременно действующих факторов и меняющихся на , уровнях [14].



При многофакторной классификации используются различные схемы планирования эксперимента, например, латинские квадраты, латинские кубы и др., позволяющие значительно сократить число наблюдений.

**Пример 4.1.** Однофакторный дисперсионный анализ.



**4.2. Метод регрессионного анализа**

Рассмотрим объекты идентификации, структурная схема которых имеет вид (рис. 4.2).



Рис. 4.2. Структурная схема объекта идентификации

Здесь, как и ранее (см. раздел 3), – вектор управляющих воздействий размерности ; – вектор контролируемых возмущений размерности ; – аддитивная помеха; – выходная переменная, скаляр.



Переменные входных векторов и и выходная – измеряемы и представляют собой реализации случайных процессов.



Зависимость выходной переменной от входных переменных представим в виде

, (4.11)

где – вектор неизвестных параметров (коэффициентов) модели;  – вектор заданных (известных) базисных функций, например , , , , , и т.д.



## Для удобства представления данных введем следующие обозначения

. (4.12)



Этот этап часто называют линеаризацией переменных.

С учетом (4.12) зависимость (4.11) в развернутом виде будет иметь вид

, (4.13)

где – линеаризованные переменные (регрессоры); – неизвестные параметры.



Как правило, первый член уравнения (4.13) представляет собой свободный член и поэтому переменную называют фиктивной переменной.



Зависимость (4.13) линейна относительно неизвестных параметров .



Результаты наблюдений за входными переменными , и выходной после линеаризации переменных (4.12) представим в виде входной и выходной матриц наблюдения



, (4.14)

где – число наблюдений.



## В матричной форме модель (4.13) с учетом (4.14) примет вид

, (4.15)

где размерности матриц , , , .



Матрица *Х* ранга известна (это результаты наблюдений).



Задача метода регрессионного анализа (МРА) состоит в получении оценок неизвестных параметров и статистическом анализе полученных результатов.



Для получения оценок используют метод наименьших квадратов (МНК). В матричной форме МНК-оценки вычисляют по формуле

, (4.16)

где – матрица Фишера, симметричная квадратная матрица размерности ;  – дисперсионная матрица размерности .



Модель регрессионного анализа для линеаризованных переменных

. (4.17)

Согласно (4.11) для исходных входных переменных , и базисных функций модель регрессионного анализа имеет вид



. (4.18)

Для проведения статистического анализа полученных результатов необходимо, чтобы были выполнены следующие предпосылки:

1. ошибки наблюдения имели нормальный (гауссовский) закон распределения с параметрами



, (4.19)



где – дисперсия помехи; – единичная матрица;



1. ошибки регистрации входных переменных пренебрежимо малы по сравнению с помехой ;



1. постулируемая структура модели (4.11) (4.13) соответствует искомой зависимости , т.е. структурно адекватна объекту.



При выполнении этих предпосылок вектор имеет нормальное распределение



, (4.20)



а полученные МНК-оценки (4.16) не смещены, состоятельны, асимптотически эффективны и имеют совместный нормальный закон распределения

. (4.21)

Если же ошибки не подчиняются нормальному закону распределения, но выполняются условия (4.19), то оценки (4.16) будут наилучшими в классе линейных оценок, несмещенными, состоятельными и асимптотически нормальными [23].



Поскольку дисперсия помехи , как правило, априори неизвестна, то при выполнении предпосылок МРА можно найти ее оценку



(4.22)

где

, (4.23)

предсказанное по уравнению регрессии (4.17) значение выходной переменной для *i*-ой строки матрицы наблюдения (4.14).

Можно непосредственно выдвинуть гипотезу о значимости всех коэффициентов модели (4.13)



Для проверки этой гипотезы рассчитаем

, (4.24)

и если , то с вероятностью можно утверждать, что между переменной и вектором , включенным в модель (4.13), нет функциональной зависимости, и, следовательно, весь разброс значений обусловлен действием помехи .



Если подтверждена значимость всех коэффициентов модели, можно проверить гипотезы относительно отдельных параметров (коэффициентов) модели.

*Проверим* гипотезу



где – заданное значение -го параметра.



При этом относительно остальных коэффициентов не делается никаких предположений.

Для этого рассчитаем

, (4.25)

и если , то нуль-гипотезу отвергаем.



Здесь , – диагональный элемент дисперсионной матрицы .



Чаще всего , и тогда гипотеза соответствует проверке параметров на значимость



, (4.26)



соответственно

(4.27)

и если какое-то , то -й параметр признается незначимым, т.е. равным нулю и его следует исключить из модели (4.13). Процесс исключения -го параметра из модели влечет за собой исключение -го столбца из матрицы наблюдения (4.14) и повторное вычисление для уменьшенного числа параметров МНК-оценок (4.16), поскольку оценки взаимозависимы между собой через дисперсионную матрицу .



Процедура повторяется до тех пор, пока все параметры не окажутся значимыми.

Интервальная оценка выходной переменной в каждом -ом опыте матрицы наблюдений равна



(4.29)

где – строка матрицы наблюдений ; – предсказанное значение выходной переменной, рассчитанное по (4.23).



Интервальная оценка для произвольного вектора не принадлежащего матрице наблюдений



(4.30)

где

Для оценки работоспособности полученной модели (уравнения регрессии) (4.17) вычисляют

, (4.31)



где

, (4.32)



. (4.33)



Если , то модель работоспособна.



Рекомендуемое отношение работоспособности модели [15]

. (4.34)



Соотношения работоспособности не дают ответа на вопрос о структурной адекватности полученной модели объекту.

Если масштабы измерения переменных очень различаются, например, изменяется в интервале (100÷200 кг), а переменная соответственно в интервале (0.01÷0.2 см), то параметры уравнения регрессии (размерные величины) не всегда могут характеризовать влияние линеаризованной переменной на выходной показатель . Для сравнительной оценки их влияния на целесообразно провести нормирование результатов наблюдений с учетом (4.32) и (4.33)



, (4.35)



, (4.36)



где

,



,



.



В результате нормирования (сравни с (1.24)) результатов эксперимента получим нормированные матрицы наблюдений и соответственно нормированные МНК-оценки

, (4.37)

где матрица

 (4.38)

несет информацию о взаимной коррелированности линеаризованных переменных (выборочные парные коэффициенты корреляции)

= *j*=1, *n*, *k*=1, *n*, (4.39)

где .

Вектор  несет информацию о взаимной коррелированности -ой линеаризованной переменной с выходной переменной



= *j*=1, *n*, (4.40)

Уравнение регрессии для нормированных переменных с учетом (4.37) примет вид

. (4.41)

Это уравнение не имеет свободного члена.

Для оценки работоспособности данного уравнения рассчитывают выборочный коэффициент множественной корреляции, характеризующей тесноту связи между переменной и вектором



(4.42)

или

. (4.43)

Рекомендуемое значение служит оценкой хорошей работоспособности уравнения регрессии.



Для перехода от нормированных параметров (4.37) к исходным (4.16) можно воспользоваться соотношением

. (4.44)

Если наблюдения в эксперименте неравноценны, т.е. какие-то результаты не очень достоверны, и есть возможность их «взвесить», то для обработки результатов в эксперименте используют взвешенный (обобщенный) МНК

, (4.45)

где – симметричная матрица весовых коэффициентов размерности



Планирование пассивного эксперимента по сбору данных для МРА зависит от свойств исследуемого объекта и вида выбранной модели.

Согласно (4.20) в каждом -ом эксперименте (наблюдении) случайная величина имеет нормальное распределение с одинаковой для всех опытов дисперсией и случайные величины и в отдельных опытах не коррелированны между собой. Следовательно, если объект безинерционный (статический) и на входе действуют случайные процессы , то и на выходе будем наблюдать случайный процесс .



Используя результаты разделов 2.8 и 2.9, необходимо оценить время корреляции случайного процесса .



Тогда интервал съема данных (интервал квантования) выбирается из условия

. (4.46)



После выбора необходимо определить длительность эксперимента, т.е. объем наблюдений . Здесь следует руководствоваться тем обстоятельством, что входные воздействия должны «пробежать» все свои возможные значения. Некоторые практические рекомендации по выбору длительности эксперимента приведены в [16].



Процедура эксперимента состоит в одновременном съеме данных и представлении их в виде матриц наблюдений (4.14).



Если объект исследования динамический, а мы строим статическую модель (4.11), то влияние динамики следует исключить из эксперимента. Самое простое решение, это вести съем данных после окончания переходных процессов в объекте. Причем если это объекты первого рода вида (3.6), то необходимо знать динамику каналов входных воздействий и, кроме того, иметь возможность удерживать на время переходного процесса эти воздействия на постоянном уровне. Это уже активно-пассивный эксперимент и реализовать его можно для относительно простых объектов. Если исследуем объект второго рода типа (3.7) для скалярного выхода , то динамику выхода можно заменить звеном чистого транспортного запаздывания , где – время переходного процесса в исходном динамическом звене. В этом случае все измерения выходной переменной проводят со сдвигом на время .



Если входные воздействия измеряются с погрешностью (нарушается предпосылка 2) МРА), то это эквивалентно действию добавочной помехи и приводит к искажению соотношения между оценками уравнения регрессии. Более подробно о влиянии погрешностей дано в [16].

**4.3. Рекуррентные алгоритмы идентификации линейных моделей**

**4.3.1. Рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК)**

Пусть взаимосвязь между входными линеаризованными переменными и выходной переменной представлена зависимостью (4.13).

Задача РМНК состоит в том, чтобы по мере поступления данных с объекта исследования получать текущие оценки модели. Для этого модель (4.17) на -ом наблюдении представим выражением



(4.47)

где – вектор оценок параметров, полученных на предыдущем шаге, размерности ; – вектор-строка наблюдаемых линеаризованных переменных, размерности ; – предсказанное (прогнозируемое) значение выходной переменной.



Процедура РМНК [16] обеспечивает на -ом такте вычисление:



вектора оценок коэффициентов

(4.48)

ковариационной матрицы оценок

, (4.49)



остаточной суммы квадратов

(4.50)

остаточной дисперсии

. (4.51)



Уравнение (4.48) показывает, что текущая (новая) оценка получается добавлением к предыдущей оценке поправки, пропорциональной невязке между измеренным и предсказанным по модели значением выходной переменной .



Для начала расчетов необходимы начальные значения . Если имеется начальная выборка наблюдений, то применение к ней обычного МНК позволяет вычислить указанные начальные значения. Если такой выборки нет, то в качестве начальных оценок принимаем

(4.52)

где – единичная матрица размерности ; – большое число .



Выбор начальных нулевых условий (4.52) приводит к появлению переходного процесса подстройки оценок параметров модели к установившимся значениям.

Если ошибки наблюдений распределены по нормальному закону, то к полученным результатам РМНК можно применять статистический анализ.

С ростом числа наблюдений новые измерения все меньшее влияние оказывают на изменение оценок , ибо все предыдущие и текущие наблюдения входят с равным весом. Если коэффициенты модели постоянны и не меняются во времени, то оценки с ростом стремятся к истинным коэффициентам .



**4.3.2. Оптимальный одношаговый алгоритм**

Для идентификации параметров модели (4.13) авторами [8] предложена следующая процедура

(4.53)

Здесь – наблюденное значение выходной переменной на -ом наблюдении; , – вектор оценок на -ом наблюдении размерности ; – вектор значений линеаризованных переменных на -ом наблюдении размерности ; – параметр алгоритма (положительное число).



Как и в РМНК для начала вычислений необходимы начальные оценки .

Если нет информации о численных значениях параметров модели, то следует воспользоваться начальными значениями

Выбор параметра алгоритма зависит от уровня помех , точности измерения переменных , масштаба входных переменных, их статистических характеристик, размерности модели . В работе [8] приведены некоторые рекомендации по выбору оптимального значения для частных случаев. Обобщая эти рекомендации необходимо выбирать в диапазоне



. (4.54)



Значение рекомендуется выбирать при отсутствии помехи на выходе объекта и ошибок измерений входных переменных. При этом алгоритм обеспечит максимальную скорость сходимости оценок к истинным значениям . При этом предполагается, что знаменатель (4.53) не равен нулю при любом .



При скорость сходимости алгоритма уменьшается, но уменьшается и влияние помех на входе и выходе объекта на эффективность оценивания.



Алгоритм допускает повторное использование имеющихся данных для уточнения текущих оценок между тактами наблюдения.

Рассмотренный алгоритм можно применять и для идентификации нестационарных объектов с медленным дрейфом параметров модели. Алгоритм обеспечивает слежение за изменяющимися параметрами. При этом, чем медленнее меняются параметры модели и чем быстрее меняется входной вектор , тем точнее процесс слежения.



Кроме описанного оптимального одношагового алгоритма авторы [8] предлагают еще более простые алгоритмы идентификации

(4.55)

(4.56)

(4.57)

(4.58)

(4.59)

где – знаковая функция; .



Подробно свойства простейших алгоритмов даны в [8].

# **4.3.3. Метод стохастической аппроксимации**

Процедура стохастической аппроксимации для рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

(4.60)

где - параметр «забывания», скаляр; – единичная матрица размерности .



Для обеспечения сходимости оценок к истинным значениям в условиях помех последовательность должна удовлетворять условиям Дворецкого:



 (4.61)

Пример такой последовательности

, (4.62)



где *А* и *B* – константы, .



В частности, условиям (4.61) удовлетворяет такая последовательность

. (4.63)



Условия (4.61) обеспечивают уменьшающееся бесконечное корректирующее воздействие сигнала обратной связи (невязки) в условиях помех.

Процедура (4.60) отличается от процедуры (4.55) только последовательностью .



**4.4. Оценивание параметров нелинейных моделей**

Рассмотрим модель, нелинейную относительно неизвестных параметров



. (4.64)



После линеаризации переменных модель (4.64) примет вид

, (4.65)



где – линеаризованные переменные.



Запишем модель (4.65) в общем виде

, (4.66)



где – вектор неизвестных параметров; – вектор линеаризованных переменных.



# В модели (4.66) переменные и значения наблюдаемы (контролируемы) и являются входами и выходами объекта идентификации.



# Результаты наблюдений представим в виде

. (4.67)



Эти функции можно разложить в ряд Тэйлора в окрестности некоторой точки , сохранив лишь члены первого порядка малости (первые производные), а именно

или перенося свободный член в левую часть, имеем

(4.68)

где .

Вычисленные значения частных производных представим матрицей наблюдений размерности ,



Отклонения параметров модели представим вектором

,



размерности .



Отклонения значений функции в точке разложения соответственно вектором

размерности .



# Тогда выражение (4.68) в матричной форме примет вид

. (4.69)



В уравнение (4.69) линейно входит неизвестный вектор .



Процедура вычисления оценок неизвестных параметров модели такова:

1. выбираются значения оценки параметров по возможности наиболее близкими к искомым значениям ;



1. далее вычисляем для известных значений и



и разности

где – наблюденное значение выходной переменной на -ом наблюдении;



3) с учетом введенных обозначений результаты вычислений запишем в виде уравнения

,



решая которое, получим

; (4.70)



4) вектор отклонения параметров дает возможность вычисления уточненных значений



5) новые значения принимаются за базовые

и осуществляется переход к п.2.

В качестве меры эффективности процедуры выбирают квадрат невязки

(4.71)

Процедура уточнения параметров повторяется до тех пор, пока изменения параметров не станут крайне малыми.

Функция (4.71) многоэкстремальна, а потому существуют различные наборы удовлетворяющие (4.71).

Важное место занимает определение начальных параметров (см. п.1) процедуры. Зачастую используют для этого графические, аналитические или интуитивные методы.

Если для разных начальных значений процедура сходится к разным *b*, то нужно внимательно анализировать полученные результаты.

Процесс может сходиться к истинному значению, а может и расходиться.

На практике плохая сходимость может быть обусловлена удаленностью первоначального выбора параметров от истинного, высокой корреляцией некоторых параметров, когда матрица нормальных уравнений почти вырожденная, либо структурной неадекватностью объекта.

Если относительно найденных оценок параметров можно разложить функции в ряд Тейлора, и она будет линейна в пределах нескольких средних квадратичных отклонений, то можно провести обычный линейный статистический анализ, как и в МРА, а именно построить доверительные интервалы на параметры и функцию [17].



Поскольку процесс уточнения оценок параметров итерационный, то процедуру МНК-оценивания (4.70) по всем наблюдениям можно заменить на рекуррентную, обеспечивающую уточнение оценок параметров модели для вновь поступивших с объекта наблюдений .



При этом можно воспользоваться оптимальным одношаговым алгоритмом (4.53), не требующим вычисления ковариационной матрицы, т.е. обращения матрицы .



## Рекуррентная процедура вычисления оценок после очередного -го наблюдения на объекте входных переменных и выходной переменной выглядит следующим образом:



1. вычисление невязки между наблюденным и предсказанным значением выходной переменной

(4.72)

1. вычисление значений вектора частных производных для наблюденного



(4.73)

1. вычисление оценок
2. и переход к п.1.



Эффективность поиска истинных значений коэффициентов модели объекта, как и в МНК-процедуре, существенно зависит от выбора начальных оценок , уровня помех .



Структурная схема, отображающая процедуру идентификации, приведена на рис. 4.3. Векторные величины представлены двойными линиями, скаляры – простыми линиями. Ненаблюдаемая часть объекта выделена штрих-пунктирной линией.

Модель



Рис. 4.3. Структурная схема идентификации рекуррентными методами

В момент расчета используется предыдущая оценка . На схеме показан итог работы идентификатора оценка , которая будет использована на следующем шаге.

**4.5. Идентификация параметров динамических моделей**

Первые реализованные в системах управления методы идентификации динамических объектов типа «вход-выход» были основаны на использовании частотных, ступенчатых и импульсных воздействий. Эти методы требуют специально спланированных входных сигналов, а именно ступенчатых сигналов для идентификации по переходной функции, импульсных входных сигналов для идентификации по весовой функции и синусоидальных входных сигналов с различными частотами для определения частотной характеристики. Большинство этих методов применимы для линейных процессов и частично для линеаризованных и основаны на преобразовании Фурье.

Другой подход идентификации линейных процессов (динамических объектов) использует методы корреляционных функций. При этом на вход объекта подается белый шум с относительно малой амплитудой, накладываемый на рабочий входной сигнал. Некоторые соотношения, связывающие характеристики динамической системы с корреляционными функциями, приведены в разделе 1.8., а практические аспекты их вычисления в разделе 2.9.

Спектральные соотношения входных и выходных сигналов также можно использовать для идентификации параметров частотных функций динамических процессов. Взаимосвязь спектральных плотностей случайных процессов на входе и выходе динамического объекта с его частотной характеристикой приведена в разделе 1.8., а практические аспекты вычисления в разделе 2.10.

Подробно с перечисленными подходами можно ознакомиться в [18, 19, 20].

В настоящее время для идентификации динамических процессов широкое применение нашли методы регрессионного анализа (метод наименьших квадратов), методы стохастической аппроксимации и последовательного обучения, метод квазилинеаризации, градиентный метод с прогнозом, эвристические методы идентификации [19].

Рассмотрим методы идентификации динамических объектов, основанные на регрессионных процедурах с использованием метода наименьших квадратов.

Алгоритмы этих методов ничем не отличаются от алгоритмов идентификации статических объектов, рассмотренных в разделе 4.2. и 4.3.

При изложении материала использована методология [21].

Рассмотрим одномерный динамический объект (рис. 4.4).



Рис. 4.4. Одномерный динамический объект

Модель объекта представим в виде разностного уравнения

 (4.75)

и уравнение наблюдения

,

где

 (4.76)

центрированные переменные;  – абсолютные сигналы входа и выхода, – установившиеся значения входа и выхода.



Следовательно, переменные и являются вариациями абсолютных сигналов относительно установившихся значений.



Величина определяет запаздывание, равное целому числу тактов квантования.



Неизмеряемую вариацию выходной переменной подставим в уравнение наблюдения и получим



 (4.77)

Выражая в (4.77) аналогично остальные значения , ,…, через наблюденные значения , ,…, , получим



, (4.78)



где – наблюденное (измеренное) значение вариации выходной переменной; (4.79)



– вектор-строка наблюденных значений вариаций выходной переменной входного воздействия, размерности ; – вектор-строка неизвестных параметров модели (4.75) на такте измерений, размерности .



Допустим, что измерения выполнены на интервале . Результаты эксперимента представим согласно (4.78) в векторно-матричной форме



, (4.80)



где

; (4.81)





 (4.82)

Для получения оценок неизвестных параметров воспользуемся методом наименьших квадратов.



Тогда из (4.80) непосредственно имеем

, (4.83)

где

, (4.84)



при условии, что .



Выражение (4.83) может быть реализовано после того, как сформирован массив, содержащий все измерения вариаций входных и выходных сигналов.

Процедура (4.83) аналогична процедуре (4.16) для статических моделей.

*Рекуррентный метод наименьших квадратов* (РМНК).

Результаты эксперимента (4.83) можно обработать также РМНК

(4.85)

где вектор коррекции

, (4.86)



а ковариационная матрица оценок параметров

. (4.87)



В уравнении (4.85) выражение в квадратной скобке равно невязке между измеренным на объекте значением выходной переменной и предсказанной по модели с оценками, полученными на предыдущем такте вычислений



(4.88)

где

(4.89)

Исходными данными для алгоритма служат

(4.90)

причем число должно быть достаточно велико.



Полученные оценки (4.85) будут несмещенными при конечном и состоятельны в среднем квадратичном , , если выполняются следующие условия [21]:



- порядок объекта и величина запаздывания известны (структурная адекватность);



- измерение входного сигнала – производятся без ошибок, и известно установившееся значение входа ;



- входной сигнал представляет собой возбуждающий процесс порядка не ниже ;



- на выходной сигнал может действовать возмущение в виде стационарного шума . Установившееся значение известно и равно величине , умноженной на статический коэффициент усиления объекта;



- невязка не коррелирована с элементами вектора данных ;



-.



При этом сходимость оценок зависит от выбора исходных значений и .



Для получения вариации и необходимо либо иметь оценки установившихся значений и , либо перестроить алгоритм оценивания.



*Использование разностей.*

Так для получения вариаций в отсутствие информации об установившихся значениях переменных переходят к разностям

. (4.91)



В процедуре (4.85) используют разности (4.91).

*Текущее усреднение.*

Другой подход состоит в оценке текущего среднего значения [21]

, (4.92)



, (4.93)



и переход к вариациям по формулам

. (4.94)



*Оценивание свободного члена.*

Третий подход связан с введением постоянной составляющей (константы), являющейся совместной оценкой установившихся уровней. Так, если разности (4.76) подставить в уравнение (4.75), то после преобразований имеем

(4.95)



где константа

. (4.96)



Если расширить вектор константой , а вектор данных составляющей , то можно в процедуре (4.85) использовать непосредственные измерения и .



При этом будем получать и оценку . Если априори известно или , то по (4.88) при известном (оцененном) легко вычислить другое установившееся значение или .



**Пример 4.2.** Модель апериодического звена первого порядка описывается уравнениями размерности



– уравнение состояния;



– уравнение наблюдения.



Здесь – дискретный гауссовский белый шум с параметрами



;



– дискретный гауссовский процесс с параметрами



.



Поскольку входной сигнал представляет собой центрированный процесс, т.е. вариацию относительно нуля, то и выходной процесс представляет собой вариацию относительно нуля.

Для оценки неизвестных параметров и обычным МНК сформируем матрицы наблюдений (см. формулы (4.81), (4.82)





Вектор неизвестных параметров соответственно

.



МНК-оценки по результатам наблюдений



В системе Mathcad имитация объекта идентификации и обработка результатов эксперимента обычным и рекуррентным МНК выглядит следующим образом (рис. 4.5.).

Имитация объекта идентификации. Порядок m=1, запаздывание d=0



Рис. 4.5. Пример идентификации динамического объекта в системе Mathcad

**4.6. Сглаживание временных рядов**

Допустим, что наблюдаемый временной ряд (рис. 4.6) можно представить в виде:

 (4.97)

где  – наблюдаемое (измеряемое) значение временного ряда на -ом шаге;  – регулярная составляющая или полезная составляющая наблюдаемого временного ряда на -ом шаге;  – аддитивная помеха на -ом шаге наблюдения с нулевым математическим ожиданием  и конечной дисперсией .



Рис. 4.6. Наблюдаемый временной ряд

Регулярная составляющая  представляет собой модель, например:

константу или полином нулевого порядка

, (4.98)

линейную модель или полином первого порядка

, (4.99)

квадратичную модель или полином второго порядка

 (4.100)

полиномиальные модели общего вида

. (4.101)

Здесь  – вектор неизвестных коэффициентов;  – наперед заданная функция.

Задача сглаживания временного ряда состоит в выделении регулярной составляющей . Если эта задача решена, то можно осуществить прогноз наблюдаемого процесса на  тактов вперед и получить точечную оценку для -го момента наблюдения. Модель  называют также *детерминированной основой процесса.*

Наличие помехи  не позволяет точно оценить неизвестные коэффициенты .

Если у исследователя имеются данные наблюдаемого временного ряда и наблюдение больше не ведется, то результаты реализации временного ряда необходимо представить на графике.

Графическое представление данных существенно облегчает выбор структуры (вида) модели. Если это ряд возрастающих данных, то следует выбрать модель (4.99) или (4.100). Если видны периодические составляющие, то в модель общего вида (4.101) необходимо включить тригонометрические составляющие.

Графическое представление данных необходимо дополнить некоторыми формальными процедурами. Так временной ряд разностей первого порядка

, (4.102)

колеблющийся на графике около нуля, предопределяет модель первого порядка (4.99). Если около нуля колеблются разности второго порядка

, (4.103)

то следует выбрать модель (4.100).

Для обработки результатов наблюдений и оценки неизвестных коэффициентов модели можно воспользоваться известным методом наименьших квадратов (МНК) либо его модификациями.

Если результаты наблюдений временного ряда поступают в темпе технологического процесса, то процедура обработки данных должна учитывать:

* объем накапливаемых данных может быть достаточно большим и следовательно, объем необходимой памяти для хранения всех данных будет увеличиваться;
* снижение доверия к прошлым результатам;
* нестационарность случайного процесса на длительном интервале наблюдения;
* особенности комплекса технических средств сбора наблюдений.

Более всего подходят для этих целей рекуррентные процедуры, рассмотренные в подразделе 2.8.

*Метод скользящего среднего*. Пусть наблюдаемый временной ряд описывается моделью (4.97), детерминированную основу которого можно представить полиномом нулевого порядка (4.98) с изменением уровня  в случайные моменты времени (рис. 4.7).



Рис. 4.7. Реализация временного ряда для случайного изменения

детерминированной основы 

Очевидно, что простое применение МНК для всех накопленных  данных не учитывает случайное изменение детерминированной основы, поскольку все данные входят с равным весом. Анализируя график процесса (см. рис. 4.7) следовало бы больше доверять последним наблюдениям, а прошлые, например, на интервале , следовало бы забыть.

Общий вид скользящего среднего

, (4.104)

где  – среднее значение временного ряда на -ом и -ом шаге наблюдения;  – наблюденные (измеренные) значения временного ряда на -ом и  шаге наблюдения;  – число удерживаемых в памяти данных для усреднения (ширина окна скольжения).

Например . Тогда с приходом 11-го измерения  первое измерение  будет забыто. Все измерения войдут с равным весом . Для обработки и хранения данных необходим вектор, размерности  и процедура перезаписи данных в ЦВМ по принципу стека с приходом каждого нового наблюдения.

Скорость реакции оценок модели на изменение детерминированной основы зависит от величины . Она увеличивается с уменьшением , но при этом увеличивается и влияние ошибок  на точность вычисленных оценок модели. Для рассматриваемого случая дисперсия оценки равна

. (4.105)

Таким образом, точность оценки (4.105) и скорость реакции процедуры (4.104) на изменения детерминированной основы противоречивы в своей основе.

*Метод экспоненциального сглаживания*. Процедура записывается в виде

, (4.106)

где  – сглаженное значение временного ряда на -ом и -ом шаге наблюдения;  – наблюденное (измеренное) значение временного ряда на -ом шаге наблюдения;  – постоянная сглаживания.

В теории фильтрации уравнение (4.106) соответствует цифровому фильтру низких частот.

В процедуре (4.106) для вычислений, в отличие от (4.104), необходимо хранить только сглаженное значение .

Если в формулу (4.106) подставить значение  и т.д., то придем к выражению

. (4.107)

Отсюда следует, что величина  есть линейная комбинация всех наблюдавшихся значений временного ряда, вес которых убывает с «возрастом» в геометрической прогрессии.

Если для исходного временного ряда



применить процедуру сглаживания (4.106), то получим сглаженный временной ряд

.

Если для сглаженного временного ряда  вновь применить процедуру сглаживания

, (4.108)

то получим новый сглаженный временной ряд

.

Здесь верхний индекс (2) характеризует процедуру двойного экспоненциального сглаживания.

В общем случае процедура -го порядка сглаживания имеет вид

. (4.109)

Для прогнозирования по моделям (4.98÷4.100) необходимо на каждом шаге наблюдения вычислять оценки модели. Рассмотрим эти процедуры.

*Полином нулевого порядка* (4.98). Процедура вычислений имеет вид

(4.110)

где – прогнозируемое значение временного ряда на -ый шаг наблюдения;  – наблюденное значение на -ом шаге наблюдения; – оценка коэффициента модели (2.88) на -ом шаге наблюдения; - невязка или ошибка прогноза на -ом шаге наблюдений.

Процесс коррекции оценки иллюстрирует рис. 4.8.



Рис. 4.8. Процесс подстройки оценки на -ом шаге наблюдения

Из формулы (4.110) и рис. 4.8 видно, что величина коррекции оценки определяется величиной невязки и коэффициентом . Таким образом, на каждом шаге наблюдения осуществляется адаптация коэффициента модели под текущее возможное изменение детерминированной основы. Из (4.110) следует, что если , то реакции на изменение нет, поскольку процедура не доверяет новым значениям . Если , то реакция мгновенная. Правда и сглаживания не происходит.

Для начала работы процедуры (4.110) необходимо задать начальные условия . Самое простое, это начальное значение можно положить равным первому измеренному значению 

. (4.111)

Согласно (4.110) и (4.107) процедура сглаживания – это линейная операция всех наблюденных значений временного ряда. Следовательно, свойства полученных оценок модели определяются свойствами помехи, при условии структурной адекватности модели процессу. Если к тому же наблюдаемый процесс стационарен, то можно рассчитать дисперсию ошибки прогноза для условия 

. (4.112)

Если наблюдаемые значения помехи коррелированны

,

то [17]

. (4.113)

Отсюда следует, что коррелированность измерений помехи увеличивает дисперсию ошибки прогноза.

Если помеха  имеет нормальный закон распределения, то можно построить доверительный интервал для прогнозируемого значения временного ряда. Для этого следует воспользоваться результатами подраздела 2.3.

Прогнозируемое значение на -шагов вперед равно текущей оценке

. (4.114)

При выборе постоянной сглаживания можно воспользоваться выражением

. (4.115)

Данное значение  обеспечивает эквивалентность ошибки предсказания для скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Если , то приближенно .

*Полином первого порядка* (4.99). Процедура вычислений имеет вид

(4.116)

Все обозначения аналогичны, что и для процедуры (4.110).

Процесс коррекции показан на рис. 4.9.

Начальные значения процедуры, если нет никаких априорных сведений об оценках, можно положить равными

. (4.117)

Прогнозируемое значение временного ряда на -шагов вперед равно

. (4.118)



Рис. 4.9. Процесс подстройки оценок линейной модели на -ом шаге наблюдения

Дисперсия ошибки прогноза некоррелированных наблюдений ошибки равна [17]

(4.119)

.

Как видно из рис. 4.9 после очередной коррекции оценки модели изменились скачком.

*Полином второго порядка* (4.100). Процедура вычислений имеет вид

. (4.120)

Все обозначения аналогичны обозначениям процедуры (4.110).

Процесс коррекции оценок показан на рис. 4.10.

Начальные значения процедуры при неизвестных сведениях об оценках можно положить равными

. (4.121)



Рис. 4.10. Процесс подстройки оценок квадратичной модели на -ом

шаге наблюдения

Прогнозируемое значение временного ряда на *m-*шагов вперед на -ом шаге равно

(4.122)

Дисперсия ошибки прогноза для некоррелированных наблюдений ошибки равна [17]

(4.123)

Некоторые практические рекомендации. При выборе степени полинома не следует ее завышать, ибо простые модели нулевого и первого порядка подстраиваются на каждом шаге к изменениям модели. Модели высших порядков могут давать большие погрешности предсказания при изменении свойств процесса.

Выбор нулевых начальных условий (4.117) и (4.121) потребует некоторого времени для подстройки параметров модели, зависимого от постоянной сглаживания *α* (рис. 4.11).

Если объем наблюдений  не велик, то имеющиеся данные можно многократно пропускать в зависимости от выбранной модели через процедуры (4.110), (4.116), (4.120) соответственно. Это позволяет значительно сократить время переходного процесса подстройки оценок модели.



Рис. 4.11. Характер переходного процесса подстройки оценки 

в зависимости от 

Выбор одна из самых серьезных проблем экспоненциального сглаживания и зависит от свойств помехи , свойств наблюдаемого процесса, интервала наблюдения.



Если в процессе сглаживания наблюдается устойчивая тенденция роста невязки , то вводят адаптацию постоянной сглаживания в функции невязки.

**Пример. 4.3.** Имеется линейно нарастающий временной ряд

,



где детерминированная основа

.



Ошибка измерений представляет собой нормально распределенный случайный процесс с параметрами

.



По результатам моделирования в системе Mathcad оценить эффективность методов сглаживания:

1. стандартных средств Mathcad;
2. метода экспоненциального сглаживания для и для модели нулевого и первого порядка.



За критерий эффективности взять оценку дисперсии невязки

(4.124)

Результаты исследований приведены на рис. 4.12.





Рис. 4.12. Реализация примера 4.3



Рис.4.12. Продолжение



Рис. 4.12. Продолжение



Рис. 4.12. Окончание

Анализируя полученные результаты моделирования, можно сделать вывод, что наилучший результат выдает процедура МНК-сглаживания. Она требует всего массива наблюденных данных и не ориентирована на последовательную обработку данных по мере их поступления.

Эффективность рекуррентных процедур сильно зависит от выбранных параметров и .



**5. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА**

**5.1. Общие требования к плану эксперимента**

Рассмотрим объекты, структурная схема которых имеет вид (рис. 5.1).



Рис. 5.1.

Здесь, как и ранее (см. раздел 3.4), – вектор управляющих воздействий (факторов) размерности , – аддитивная помеха, – выходная переменная, скаляр.



Влияние контролируемых возмущений отнесено к действию аддитивной помехи. Математическая модель объекта ищется в классе статических моделей



. (5.1)



Результаты пассивного эксперимента, как и в разделе 4.3, представляем матрицами наблюдения

, (5.2)



где – число коэффициентов (параметров) постулированной модели (5.1), без свободного члена; – число экспериментов.



По аналогии с (4.16) получим МНК-оценки

(5.3)

При выполнении предпосылок МРА точность оценок (5.3) определяется ковариационной матрицей

(5.4)

где – дисперсия помехи.



Анализ выражений (5.3) и (5.4) указывает на то, что свойства оценок регрессионного уравнения определяются свойствами матрицы наблюдений (5.2). Если матрицу формировать по определенным правилам, то можно получать заданные свойства оценок . Но тогда необходимо проводить уже не пассивный эксперимент, регистрируя только изменения , , а активно изменять их в соответствии с некоторым заранее заданным планом эксперимента, т.е. проводить *активный эксперимент.*



Множество всех точек проведения эксперимента задается матрицей плана (5.2).



Одной из характеристик плана эксперимента является число экспериментов , которое определяет, с одной стороны, затраты на эксперимент, с другой – свойства плана и точность уравнения регрессии. Если , то план будет *насыщенным*, т.е. число оцениваемых коэффициентов модели (5.1) равно числу экспериментов.



План называется *ортогональным*, если матрица Фишера



(5.5)



будет диагональной матрицей. В этом случае все оценки (5.3) будут независимы друг от друга, а следовательно, если один или несколько параметров оказались незначимы по критерию Стьюдента (см. раздел 4.2), то нет необходимости повторять процедуру МРА после их удаления.

План называется *ротатабельным*, если дисперсия оценки выходной переменной



(5.6)

зависит только от расстояния точки до центра плана эксперимента независимо от направления до этой точки.



План называется *А–оптимальным*, если сумма диагональных элементов (след) матрицы минимальна



. (5.7)



Поскольку диагональные элементы определяют дисперсию оценки

(5.8)

то А–оптимальный план эксперимента обеспечивает минимум средней дисперсии оценок коэффициентов модели.

План называется *D–оптимальным*, если определитель плана минимален



, (5.9)



т.е. объем эллипсоида рассеивания оценок коэффициентов минимален.

План называется *G–оптимальным*, если он минимизирует величину максимальной дисперсии предсказанных (рассчитанных) по уравнению регрессии значений *y*.



План называется *Е–оптимальным*, если он минимизирует максимальное собственное число соответствующей ему ковариационной матрицы оценок коэффициентов.



Все перечисленные планы предполагают, что вид модели (5.1) задан априори до эксперимента.

**5.2. Полный факторный эксперимент**

Полным факторным экспериментом (ПФЭ) называют эксперимент, реализующий все возможные неповторяющиеся комбинации уровней входных независимых переменных (факторов), каждая из которых варьируется на двух уровнях. Число таких комбинаций



. (5.10)



Процедуру планирования и обработки результатов ПФЭ рассмотрим на примере объекта с двумя факторами .



Сначала рассчитаем число экспериментов

.



Осуществим переход от исходных переменных к нормированным переменным



, (5.11)



где – текущее значение входного воздействия; – базовое (среднее) значение -го входного воздействия; – интервал варьирования входного воздействия; – минимальное и максимальное значение -го входного воздействия (см. раздел 3.1).



В нормированном пространстве очевидно . Переход от исходного пространства к нормированному иллюстрирует рис. 5.2.



Рис. 5.2. Исходное и нормированное пространство для планирования эксперимента

Совершенно очевидно, что если в исходном пространстве входные воздействия – размерные величины (, кг), то в нормированном они безразмерные. Центр плана эксперимента перемещается в нормированном пространстве в начало координат.



Обратный переход от нормированных переменных к исходным согласно (5.11) осуществляем по формуле

. (5.12)



Модель, которую можно получить по результатам ПФЭ для , имеет вид неполного квадратичного полинома

(5.13)

где – фиктивная переменная для оценки свободного члена полинома.



В этом уравнении число коэффициентов модели равно числу экспериментов матрицы плана .



Составление матрицы плана эксперимента ведется в нормированном пространстве в виде следующей табл. 5.1.

*Формирование матрицы ПФЭ.*

Вектор-столбец фиктивной переменной для оценки свободного члена модели (5.13) полагают равным единице .

Вектор-столбец  всегда начинается с «-1» и далее поочередно чередуются +1, -1 и т.д.

Вектор-столбец  меняет знак с вдвое меньшей частотой и начинается с -1.

Вектор-столбец  получается перемножением столбцов  и .

Таблица 5.1

**Матрица ПФЭ для *m=2* и числа повторных экспериментов *p=3***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта | | | *x*0 | ***x*1** | ***x*2** | *x*1*x*2 | Результат  эксперимента | | |  |
|  |  |  | *yi*1 | *yi*2 | *yi*3 |
| 5 | 9 | 6 | +1 | **-1** | **-1** | +1 | *y*11 | *y*12 | *y*13 |  |
| 3 | 1 | 12 | +1 | **+1** | **-1** | -1 | *y*21 | *y*22 | *y*23 |  |
| 2 | 4 | 7 | +1 | **-1** | **+1** | -1 | *y*31 | *y*32 | *y*33 |  |
| 8 | 10 | 11 | +1 | **+1** | **+1** | +1 | *y*41 | *y*42 | *y*43 |  |

Два вектор-столбца  и  (выделены жирно) образуют собственно план активного эксперимента.

*Свойства ПФЭ.*

Сформированный план эксперимента обладает свойствами симметричности, ортогональности и ротатабельности.

Симметричность плана относительно центра планирования (начала координат) проверяется следующим образом:

, (5.14)

т.е. алгебраическая сумма элементов вектор-столбца равна нулю (кроме нулевого).

Ортогональность плана проверяется из соотношения

, (5.15)

т.е. сумма почленных произведений любых двух векторов-столбцов равна нулю.

Свойства ротатабельности доказано в работах по теории планирования эксперимента.

*Проведение эксперимента.*

В левой части матрицы планирования пронумерована последовательность реализации строк матрицы ПФЭ для - повторных опытов. Очередность реализации строк ПФЭ определяется путем проставления неповторяющихся случайных чисел от 1 до , например, с генератора равномерного распределения, в столбцы .



После того как матрица плана сформирована, следует перейти к ее реализации.

Для этого выбираем строку с номером опыта «1». Для нашего плана это вторая строка с координатами . На плане (см. рис. 5.1) это точка . Соответственно на объекте будут установлены значения , (точка в исходном пространстве). После реализации эксперимента на объекте результат измерения выходной переменной запишем элементом . Далее необходимо реализовать на объекте третью строку для номера опыта и получим в результате эксперимента элемент и т.д.



*Проверка воспроизводимости эксперимента* – это проверка предпосылки МРА об однородности выборочных дисперсий в каждой точке плана эксперимента. Поскольку в каждой точке было проведено -повторных экспериментов, то выборочная дисперсия -ой точки плана равна



, (5.16)

где .



Для проверки гипотезы используем критерий Кохрена

, (5.17)

где в числителе записано максимальное значение выборочной дисперсии из полученных по (5.16).

Если

, (5.18)

где – уровень значимости; , – число степеней свободы.



Если (5.18) выполняется, то гипотеза принимается и вычисляют выборочную дисперсию (дисперсию воспроизводимости) эксперимента

, (5.19)

с числом степеней свободы .



Если гипотеза об однородности отвергнута, то следует признать невоспроизводимость эксперимента относительно входных воздействий вследствие существенного влияния помехи либо отсутствием функциональной связи воздействий с выходом . Необходимо увеличить число параллельных опытов .



*Оценка параметров модели* для нормированного пространства осуществляется по формулам

. (5.20)

Далее проверяем коэффициенты на значимость, т.е.



Для этого рассчитаем

(5.21)

где – выборочное среднеквадратическое отклонение оценки .

Если , то коэффициент – значим.



Если не значим, то нет необходимости пересчитывать остальные коэффициенты модели после удаления незначимого коэффициента в силу ортогональности матрицы плана.



Незначимость коэффициента может быть обусловлена либо малым шагом варьирования по -ой переменной , либо отсутствием функциональной связи с выходной переменной, либо большим уровнем помех.



*Проверка адекватности* уравнения регрессии (модели) предполагает проверку для уровня значимости



, (5.22)



где , ,



(5.23)

.



Если условие (5.22) выполняется, то модель признается адекватной объекту, иначе условия эксперимента, а может и вид модели, следует изменить, например, выбрать полином второго порядка и соответственно изменить матрицу планирования эксперимента. Если при , то нет степеней свободы для проверки адекватности и ее не следует проводить. В нашем случае и, следовательно, проверку адекватности проводить не следует.



*Переход в исходное пространство* осуществляется подстановкой выражений (5.11) в исходную модель (5.13)

(5.24)

и соответствующих преобразований

(5.25)

где

Для число экспериментов . Модель для оценивания



(5.26)

Матрица планирования ПФЭ для представлена в табл. 5.2.



Таблица 5.2

**Матрица ПФЭ для *m*=3, *p*=1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *v* = 1 | *x*0 | ***x*1** | ***x*2** | ***x*3** | *x*1*x*2 | *x*1*x*3 | *x*2*x*3 | *x*1*x*2*x*3 |  |
| 8 | +1 | **-1** | **-1** | **-1** | +1 | +1 | +1 | -1 |  |
| 7 | +1 | **+1** | **-1** | **-1** | -1 | -1 | +1 | +1 |  |
| 6 | +1 | **-1** | **+1** | **-1** | -1 | +1 | -1 | +1 |  |
| 3 | +1 | **+1** | **+1** | **-1** | +1 | -1 | -1 | -1 |  |
| 1 | +1 | **-1** | **-1** | **+1** | +1 | -1 | -1 | +1 |  |
| 2 | +1 | **+1** | **-1** | **+1** | -1 | +1 | -1 | -1 |  |
| 4 | +1 | **-1** | **+1** | **+1** | -1 | -1 | +1 | -1 |  |
| 5 | +1 | **+1** | **+1** | **+1** | +1 | +1 | +1 | +1 |  |

Для обработки результатов эксперимента ПФЭ можно воспользоваться процедурой МРА (см. раздел 4.2). Для этого повторные эксперименты следует расположить в продолжение основной матрицы планирования.

**5.3. Дробный факторный эксперимент**

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ) реализует только часть (дробную реплику) ПФЭ и позволяет оценить параметры неполного квадратичного полинома вида (5.13), (5.26) и т.п. при условии, что . При этом независимо оценивается только часть коэффициентов модели.



Число экспериментов плана ДФЭ равно

, (5.27)



где – показатель дробности ДФЭ, целое положительное число, .



Так если , то число строк (экспериментов) ДФЭ составляет



,



т.е. ½ долю от ПФЭ для . Поэтому часто матрицу ДФЭ в данном случае называют «полурепликой» (половиной) ПФЭ, или «четвертьрепликой» и т.д.



Для построения ДФЭ типа (5.27) отбирают основных факторов, для которых строят ПФЭ. Далее этот план дополняют недостающими факторами, приравненными к соответствующим взаимодействиям, влияние которых невелико.



Рассмотрим объект с тремя факторами . Если заранее известно, что в модели (5.26) отсутствуют все взаимодействия, и необходимо оценить параметры (коэффициенты) при линейных членах , то нет необходимости реализовать всю матрицу ПФЭ (табл. 5.2). Можно воспользоваться планом ДФЭ для , . Строим план ПФЭ для и дополняем его столбцом (табл. 5.3).



Таблица 5.3

**Матрица ДФЭ для** 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер опыта | | | *x*0 | ***x*1** | ***x*2** | ***x*3=*x*1*x*2** | Результат эксперимента | | |  |
| *v* = 1 | *v* = 2 | *v* = 3 |  |  |  |
| 2 | 3 | 11 | +1 | **-1** | **-1** | **+1** |  |  |  |  |
| 1 | 7 | 10 | +1 | **+1** | **-1** | **-1** |  |  |  |  |
| 5 | 9 | 4 | +1 | **-1** | **+1** | **-1** |  |  |  |  |
| 8 | 6 | 12 | +1 | **+1** | **+1** | **+1** |  |  |  |  |

Фактически столбец позволяет оценить коэффициент при факторе . Произведение в данном случае называют генерирующим соотношением или генератором плана ДФЭ. Домножим его левую часть и правую часть на и получим определяющее соотношение



,



или с учетом того, что окончательно имеем



. (5.28)



Соотношение (5.28) позволяет найти с какими коэффициентами смешаны линейные коэффициенты. Для этого левую и правую часть соотношения (5.28) домножим соответственно на и получим, что



(5.29)

т.е. в оценке содержится коэффициент и коэффициент при взаимодействии . Поэтому выбор генерирующего соотношения надо производить так, чтобы основные коэффициенты при линейных членах были смешаны с коэффициентами при взаимодействиях, которые заведомо не значимы.



Основные преимущества ДФЭ – это меньшее число экспериментов по сравнению с ПФЭ, особенно при росте размерности .



Обработка результатов эксперимента полностью совпадает с процедурой ПФЭ.

Более подробно о ДФЭ можно узнать в [14, 17].

**5.4. Планы для квадратичных моделей**

Для оценки коэффициентов квадратичной модели (5.1) необходимо, чтобы независимая переменная принимала по крайней мере три различных уровня.

Композиционный план (последовательно строящийся) для квадратичных моделей может быть получен путем добавления некоторого количества специальных точек, например, к планам ПФЭ или ДФЭ. Эти точки добавляются в центре плана (центральные точки) и по осям так называемые звездные точки (рис. 5.3).



Выбором величины плеча композиционного плана и числа точек эксперимента, проводимого в центре плана можно обеспечить различные свойства получаемого плана.

# Рис. 5.3. Пояснения к планам второго порядка



Наиболее широкое применение получили ортогональные, ротатабельные и *D-*оптимальные планы.

*В ортогональном* центральном композиционном планировании (ОЦКП) все коэффициенты модели (5.1) определяются независимо друг от друга. Причем ортогональность достигается соответствующим выбором величины , так для , ; , ; , ; и т.д. Число точек в центре плана , т.е. один эксперимент, так как они не влияют на ортогональность. Пример ОЦКП для приведен в табл. 5.4.



Таблица 5.4

**Матрица ОЦКП для *m* = 3, *p* = 1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Группы точек | *g* | *x*0 | ***x*1** | ***x*2** | ***x*3** | *x*1*x*2 | *x*1*x*3 | *х*2*x*3 |  |  |  |
|  | 1  2  3  4  5  6  7  8 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 | **-1**  **+1**  **-1**  **+1**  **-1**  **+1**  **-1**  **+1** | **-1**  **-1**  **+1**  **+1**  **-1**  **-1**  **+1**  **+1** | **-1**  **-1**  **-1**  **-1**  **+1**  **+1**  **+1**  **+1** | +1  -1  -1  +1  +1  -1  -1  +1 | +1  -1  +1  -1  -1  +1  -1  +1 | +1  +1  -1  -1  -1  -1  +1  +1 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 |
|  | 9  10  11  12  13  14 | +1  +1  +1  +1  +1  +1 | **-1,215**  **+1,215**  **0**  **0**  **0**  **0** | **0**  **0**  **-1,215**  **+1,215**  **0**  **0** | **0**  **0**  **0**  **0**  **-1,215**  **+1,215** | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | +1,476  +1,476  0  0  0  0 | 0  0  +1,476  +1,476  0  0 | 0  0  0  0  +1,476  +1,476 |
|  | 15 | +1 | **0** | **0** | **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Здесь – число точек ПФЭ; – число звездных точек; – число центральных точек.



Этот план не является полностью ортогональным из-за квадратичных вектор-столбцов , но удобен для формирования матрицы наблюдений и расчетов МНК-оценок в исходном пространстве . Для получения полностью ортогонального плана необходимо провести замену квадратичных элементов на элементы , . Процедура вычисления оценок такого плана в нормированном пространстве несколько отличается от процедуры расчета ПФЭ и подробно приведена в [14].



*Ротатабельный* центральный композиционный план (РЦКП) строится также на планах ПФЭ, ДФЭ, но величина плеча выбирается по формуле



, (5.30)



где – величина дробности факторного эксперимента.



Число центральных точек выбирают так, чтобы получить униформ-планирование, обеспечивающее почти равную точность предсказания величины внутри области планирования. Число этих точек уже посчитано, и планы сведены в каталоги.



Ротатабельные планы второго порядка не требуют ортогонализации вектор-столбцов, а потому никаких преобразований переменных при составлении матрицы планирования не делается.

Так, для , , ; , , ; , , .



В табл. 5.5 приведен РЦКП для .



Таблица 5.5

**РЦКП для *m* = 3, *p* = 1**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Группы точек | *g* | *x*0 | ***x*1** | ***x*2** | ***x*3** | *x*1*x*2 | *x*1*x*3 | *х*2*x*3 |  |  |  |
|  | 1  2  3  4  5  6  7  8 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 | **-1**  **+1**  **-1**  **+1**  **-1**  **+1**  **-1**  **+1** | **-1**  **-1**  **+1**  **+1**  **-1**  **-1**  **+1**  **+1** | **-1**  **-1**  **-1**  **-1**  **+1**  **+1**  **+1**  **+1** | +1  -1  -1  +1  +1  -1  -1  +1 | +1  -1  +1  -1  -1  +1  -1  +1 | +1  +1  -1  -1  -1  -1  +1  +1 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 | +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1  +1 |
|  | 9  10  11  12  13  14 | +1  +1  +1  +1  +1  +1 | **-1,682**  **+1,682**  **0**  **0**  **0**  **0** | **0**  **0**  **-1,682**  **+1,682**  **0**  **0** | **0**  **0**  **0**  **0**  **-1,682**  **+1,682** | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 2,828  2,828  0  0  0  0 | 0  0  2,828  2,828  0  0 | 0  0  0  0  2,828  2,828 |
|  | 15  16  17  18  19  20 | +1  +1  +1  +1  +1  +1 | **0**  **0**  **0**  **0**  **0**  **0** | **0**  **0**  **0**  **0**  **0**  **0** | **0**  **0**  **0**  **0**  **0**  **0** | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 | 0  0  0  0  0  0 |

Для вычисления оценок в исходном пространстве необходимо по матрице РЦКП сформировать матрицу наблюдений входных и выходных переменных и воспользоваться процедурой МРА. Для расчета оценок коэффициентов модели в нормированном пространстве можно воспользоваться процедурой, приведенной в [14].

*D-оптимальные* планы, как мы уже отмечали, минимизируют объем эллипсоида рассеяния оценок коэффициентов. Для построения *D*-оптимальных планов используют численные процедуры оптимизации, реализованные на ЦВМ. Для расчета *D*-оптимального плана необходимо задать структуру модели, определить область планирования, ее вид (куб, шар или произвольная область) и заданное число экспериментов. Последнее не обязательно. План задается с помощью совокупности величин

, (5.31)



где – точки в пространстве , в которых проводятся эксперименты – (спектр плана); – доля наблюдений от общего числа экспериментов в точке (частоты плана), .



**Пример 5.1.** Для модели (5.1) при план имеет вид (рис. 5.4)



Рис. 5.4. *D*-оптимальный план для



Соответственно частоты плана

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0.14805 | 0.14805 | 0.14805 | 0.14805 | 0.0962 | 0.08015 | 0.08015 | 0.08015 | 0.08015 |

Число экспериментов в каждой точке плана находится в соответствии с выражением

, (5.32)



где – общее число экспериментов, задаваемое экспериментатором.



Обработку результатов эксперимента для *D*-оптимальных планов проводят в общем случае с использованием МРА.

# **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ**

1. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1998.-400 с.
2. Рубан, А.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие: в 2 ч. /А.И. Рубан. – Красноярск: КГТУ 1996.Ч.1.-128 с. Ч.2.-132 с.
3. Вентцель, Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.
4. Теория автоматического управления. Ч.2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления; под ред. А.А. Воронова. учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1977.-288 с.
5. Вальд, А. Последовательный анализ /А. Вальд. – М.: ГИФМ, 1966. – 328 с.
6. Бендат, Дж. Измерение и анализ случайных процессов / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1974.-464 с.
7. Ицкович, Э.Л. Контроль производства с помощью вычислительных машин /Э.Л. Ицкович. – М.: Энергия, 1975. – 416 с.
8. Райбман, Н.С. Построение моделей процессов производства / Н.С. Райбман, В.М. Чадеев. – М.: Энергия, 1975. – 376 с.
9. ГОСТ 15893-77. Статическое регулирование технологических процессов при нормальном распределении контролируемого параметра. – М.: 1977. – 40 с.
10. ГОСТ 16.307-74. Контроль точности технологических процессов. – М.: 1974. – 30 с.
11. Баженов, А.Е. Применение экспериментально-статистических методов для идентификации электролиза алюминия / А.Е. Баженов, А.П. Дамбраускас, Г.Б. Масальский. Цветные металлы. – 1978. – № 10. – С. 32-36.
12. Баженов, А.Е. Математическое описание динамики процесса электролиза алюминия / А.Е. Баженов, А.П. Дамбраускас, Г.Б. Масальский В кн.: Оптимизация режимов работы систем электроприводов. – Красноярск: КГУ, КрПИ, 1978. – С. 29-36.
13. О связи рабочего напряжения с межполюсным расстоянием и другими параметрами электролизера. – В кн.: Стандартизация и измерительная техника / О.В. Кошаев, В.А. Кащеев, С.В. Пахомов, Н.Н. Ткачев. – Красноярск: НИИМВУЗ, КГУ, КрПИ, 1977. – С. 102-103.
14. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): учеб. пособие / Бородюк В.П., Вощинин А.П., Иванов А.З. и др.; под ред. Г.К. Круга. – М.: Высшая школа, 1983. – 216 с.
15. Дрейпер, Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Т. Смит. – М.: «Статистика», 1973. – 329 с.
16. Бородюк, В.П. Статистическое описание промышленных объектов / В.П. Бородюк, Э.К. Лецкий. – М.: Энергия, 1971. – 112 с.
17. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов; под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с.
18. Эйкхофф, П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров состояния / П. Эйкхофф. – М.: Мир, 1975. – 686 с.
19. Гроп, Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 304 с.
20. Сейдж, Э.П. Идентификация систем управления / Э.П. Сейдж, Дж.Л. Мелса. М.: Наука, 1974. – 248 с.
21. Изерман, Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман. – М.: Мир, 1984. – 541 с.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ 3

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ 5
   1. Основные понятия и определения теории вероятностей 5
   2. Функции распределения вероятностей случайной величины 7
   3. Числовые характеристики случайных величин 13
   4. Многомерные распределения вероятностей 15
   5. Случайные процессы и их основные статистические

характеристики 22

* 1. Корреляционные функции случайных процессов 29
  2. Спектральные плотности случайных процессов 37
  3. Случайные процессы в динамических системах 42

1. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ 49
   1. Общие понятия и определения 49
   2. Простейшие оценки 50
   3. Интервальные оценки. Доверительный интервал 53
   4. Проверка статистических гипотез о параметрах

распределения 56

* 1. Критерии согласия 62
  2. Последовательный анализ 63
  3. Особенности статистического вывода 73
  4. Статистики и измерения стационарного случайного процесса 73
  5. Оценка корреляционной функции 77
  6. Оценка спектральной плотности 79

1. МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ 83
   1. Средства и этапы описания объектов управления 83
   2. Характеристика моделей объектов управления 85
   3. Динамические модели объектов управления 89
   4. Статические модели 96
   5. Пример описания объекта управления 103
      1. Краткое описание процесса электролиза алюминия 103
      2. Математическая модель процесса электролиза

алюминия 105

1. МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ 119
   1. Дисперсионный анализ 119
   2. Метод регрессионного анализа 125
   3. Рекуррентные алгоритмы идентификации линейных моделей 132
      1. Рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) 132
      2. Оптимальный одношаговый алгоритм 134
      3. Метод стохастической аппроксимации 135
   4. Оценивание параметров нелинейных моделей 135
   5. Идентификация параметров динамических моделей 139
   6. Сглаживание временных рядов 146
2. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА 159
   1. Общие требования к плану эксперимента 159
   2. Полный факторный эксперимент 161
   3. Дробный факторный эксперимент 166
   4. Планы для квадратичных моделей 168

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ 172

Учебное издание

Масальский Геннадий Борисович

**Математические основы кибернетики**

Редактор А.В. Прохоренко

Корректор И.О.Фамилия

Компьютерная верстка: И.О.Фамилия

Подписано в печать (дата) 2011 г. Формат 60х84/16. (А5)

Бумага офсетная. Печать плоская.

Усл. печ. л. 11. Уч.-изд. л. 4,9

Тираж 100 экз. Заказ № 4516.

Редакционно-издательский отдел

Библиотечно-издательского комплекса

Сибирского федерального университета

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

Тел/факс (391) 244-82-31. E-mail rio@sfu-kras.ru

<http://rio.sfu-kras.ru>

Отпечатано Полиграфическим центром

Библиотечно-издательского комплекса

Сибирского федерального университета

660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а